

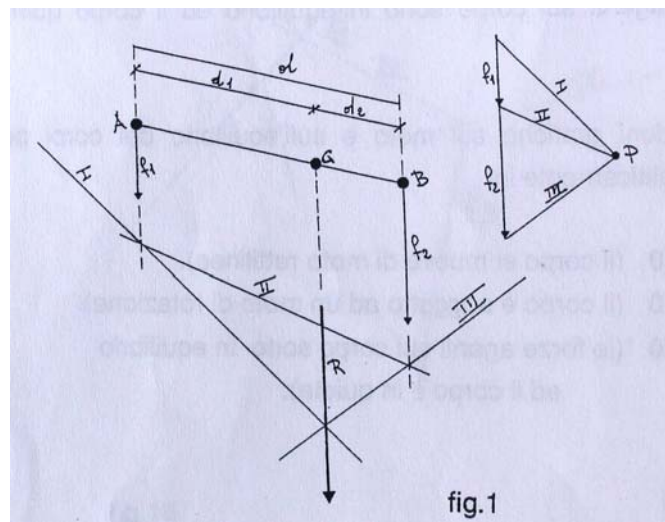
Geometria delle masse

generalità

Incominciamo ad utilizzare i concetti e le schematizzazioni trattati fin ora per poter parlare di geometria delle masse, ovvero di schematizzazione di corpi materiali. Per introdurre questi nuovi concetti, è opportuno trattare un esempio molto banale, ma di sicura efficacia.

Si vuole posizionare una stazione ferroviaria il cui scopo è quello di servire due centri abitati A e B (schematizzati in fig.1 con due punti) rispettivamente di 8000 e 12000 abitanti. Una giusta collocazione, della stazione, necessariamente deve essere funzione del numero di abitanti presente in ogni singolo centro abitato.

Per tener conto di tale influenza, possiamo schematizzare il numero degli abitanti come due masse A e B e per rappresentare anche gli abitanti, possiamo posizionare in A e B due vettori $f_1=8\text{cm}$ ed $f_2=12\text{cm}$ proporzionali alla rispettiva popolazione, supponendo di aver adottato una scala in cui $1\text{cm} = 1000$ abitanti.



Nel disegnare i vettori, è possibile dare una inclinazione qualsiasi ed un verso qualsiasi, è indispensabile, però, che i vettori oltre ad avere lo stesso verso, debbono essere paralleli tra loro. A questo punto, costruendo il poligono delle forze e quello funicolare avremo la retta d'azione del risultante delle due masse.

Congiungendo con un segmento le due masse A e B , nell'intersezione di questo segmento con la retta d'azione del risultante, avremo un punto G baricentro delle due masse e, quindi, punto in cui è opportuno posizionare la stazione ferroviaria in oggetto.

BARICENTRO DI UN SISTEMA DI MASSE

Fin ora abbiamo operato con sole due masse, vediamo adesso come ci regoliamo quando siamo in presenza di un sistema di masse di cui vogliamo conoscere il baricentro.

Supponiamo di avere un sistema di quattro masse **M1**, **M2**, **M3**, **M4**, (v.fig.2) per trovare il baricentro del sistema, in modo analogo a quanto fatto precedentemente, tracciamo quattro vettori proporzionali al valore delle masse, con punto di applicazione nei baricentri delle singole masse, aventi direzione qualsiasi, verso uguale e paralleli tra di loro; dopodiché tramite il poligono funicolare e quello delle forze, troviamo il risultante **R1** (v.fig.2,1)

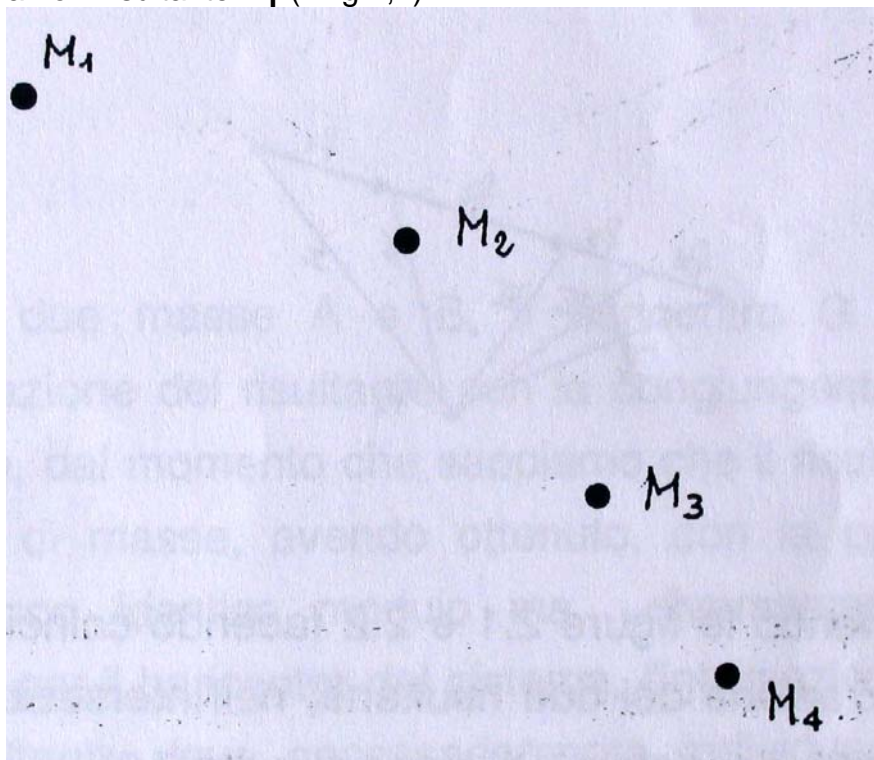


fig.2

possiamo ora ripetere la stessa procedura cambiando direzione e verso, ma sempre con vettori proporzionali alle masse, quindi con moduli uguali ai precedenti (v.fig.2,2) troveremo un'altro risultante che chiameremo R_2 e che avrà modulo uguale al precedente ma direzione e verso differente.

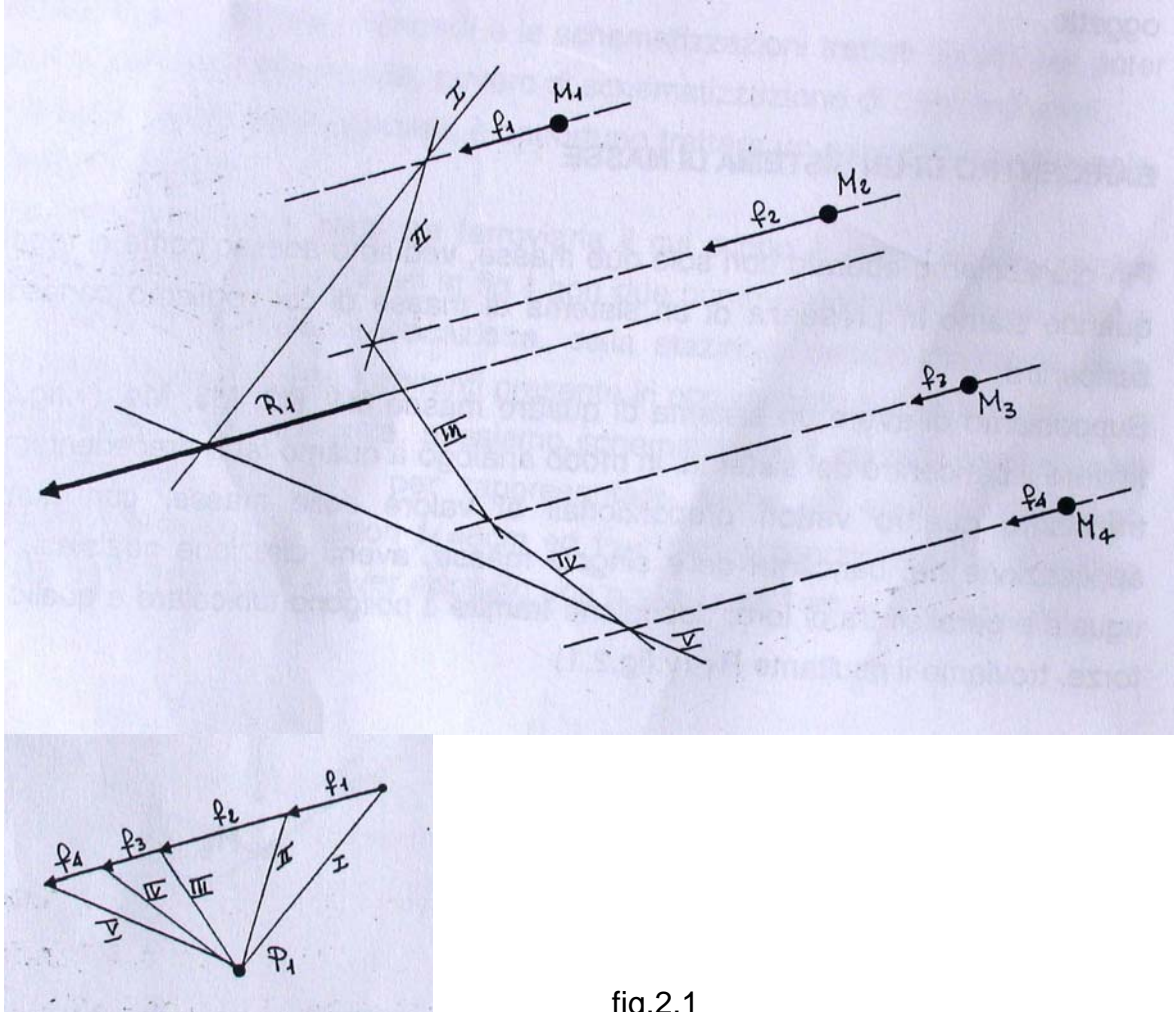
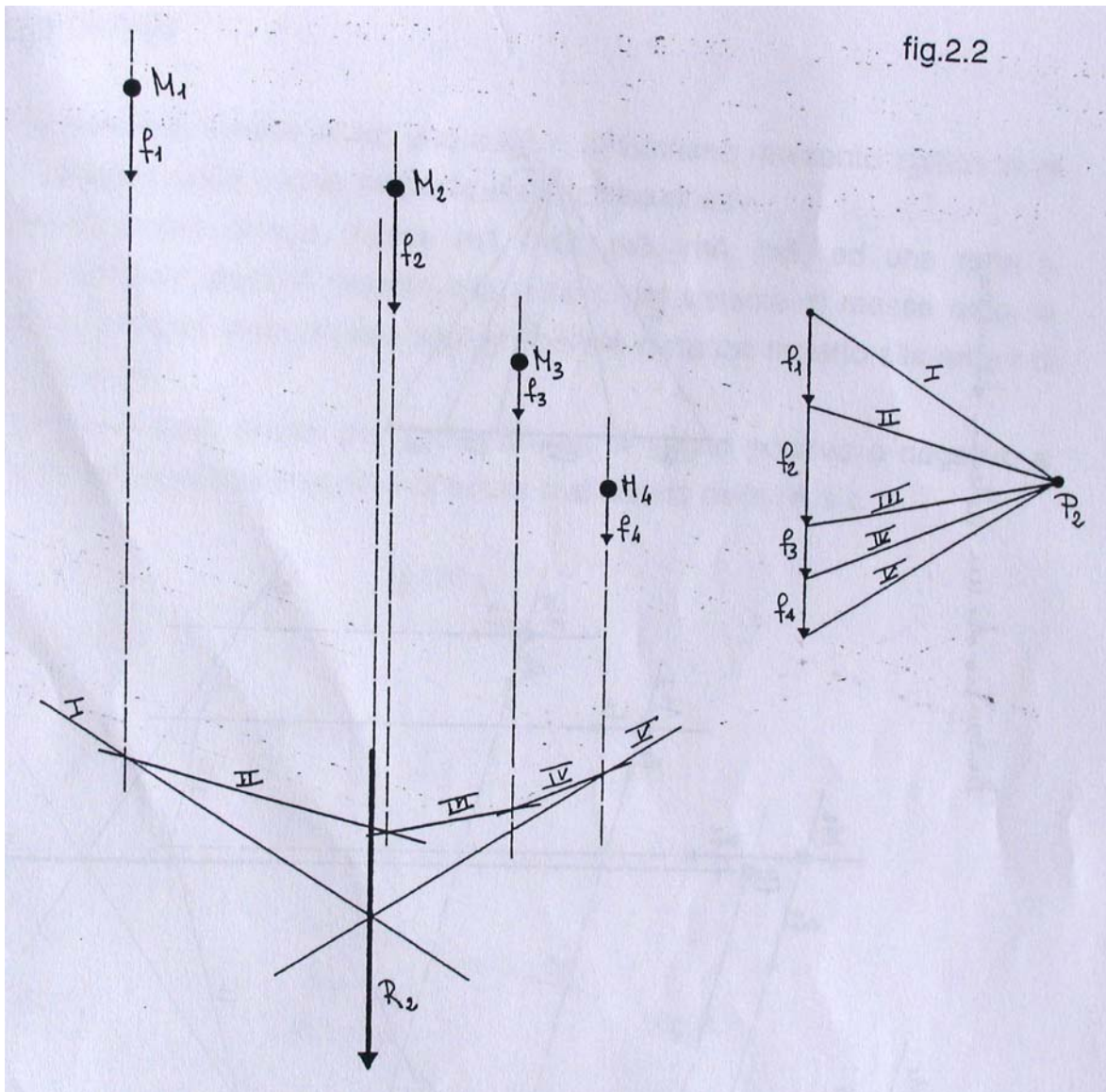


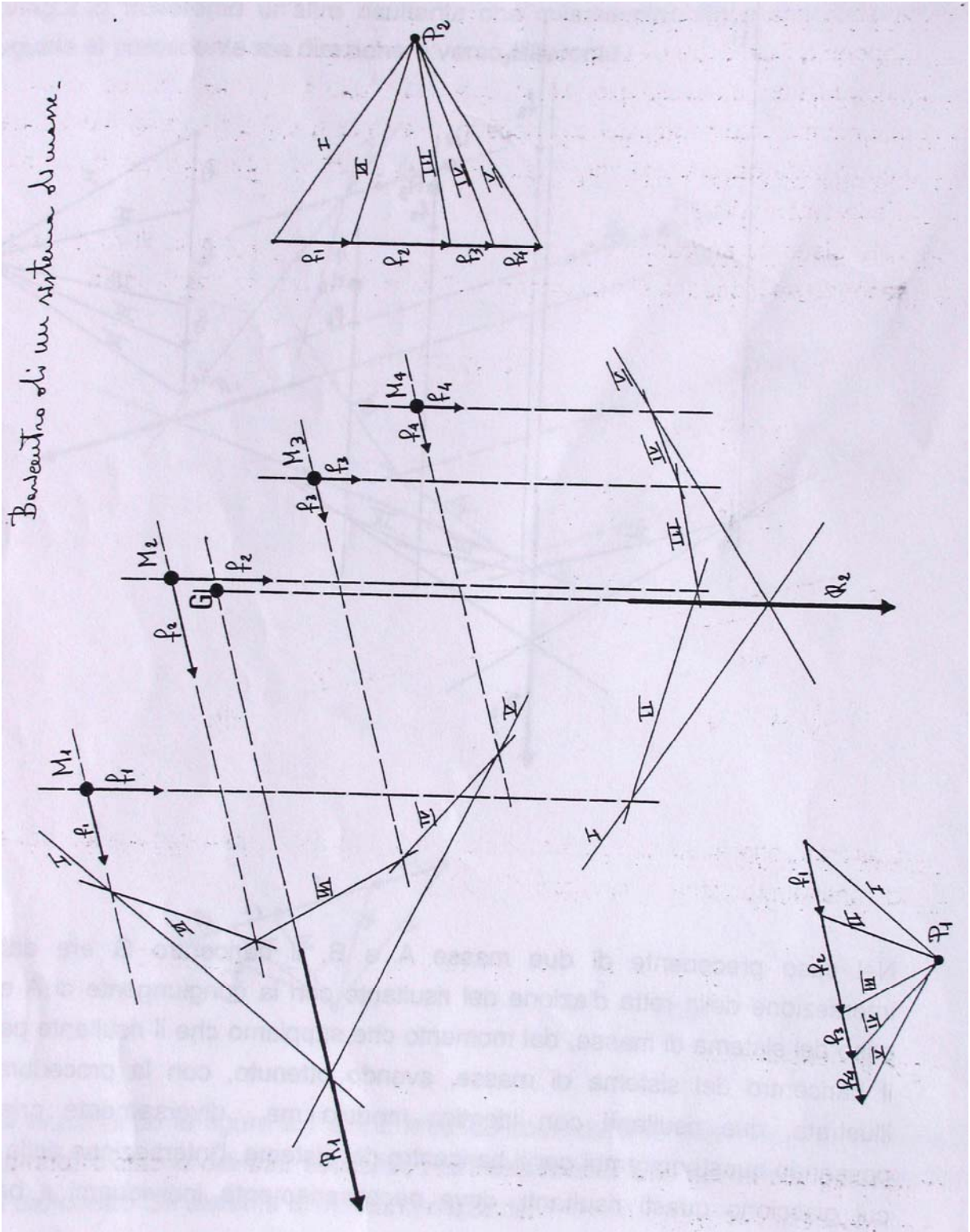
fig.2.1

Sovrapponendo le figure 2.1 e 2.2 facendo coincidere le masse e prolungando le due rette d'azione dei due risultanti, nell'intersezione di esse avremo la posizione del baricentro del sistema di masse. (v.fig.2.3)



Nel caso precedente di due masse A e B, il baricentro G era dato dalla intersezione della retta d'azione del risultante con la congiungente di A e B. Nel caso del sistema di masse, dal momento che sappiamo che il risultante passa per il baricentro del sistema di masse, avendo ottenuto, con la procedura avanti illustrata, due risultanti con identico modulo ma diversamente orientati, e passando questi entrambi per il baricentro del sistema, l'intersezione delle rette su cui giacciono questi risultanti, deve necessariamente individuarci il baricentro cercato.

fig.2.3



MOMENTO STATICO

Avendo una generica massa m ed una retta r , chiamiamo momento statico di m rispetto r , il prodotto della massa m per la distanza tra m ed r .

Supponiamo di avere cinque masse m_1 , m_2 , m_3 , m_4 , m_5 , ed una retta r , chiamiamo "momento statico" rispetto alla retta r , del sistema di masse dato, la sommatoria dei prodotti delle masse per le rispettive distanze rispetto alla retta r di riferimento. (v.fig.3)

Tale distanze andranno prese, per convenzione, di segno positivo o negativo a secondo se le masse si troveranno al di sopra o al disotto della retta r .

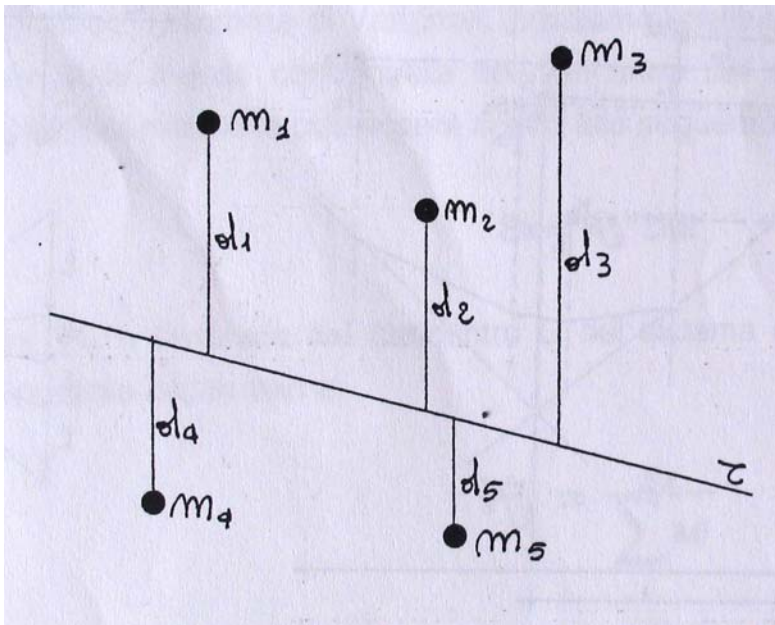


fig.3

L'espressione analitica, pertanto, indicando con S_r il momento statico del sistema di masse rispetto la retta r , quindi sarà:

$$S_r = m_1 \cdot d_1 + m_2 \cdot d_2 + m_3 \cdot d_3 - m_4 \cdot d_4 - m_5 \cdot d_5$$

e genericamente

$$S_r = \sum m_i \cdot d_i$$

Si segnala anche che il momento statico dicesi anche "momento di primo ordine" in quanto l'esponente della distanza d è uno.

COORDINATE DEL BARICENTRO DI UN SISTEMA DI MASSE

Il baricentro di un sistema di masse può essere trovato anche analiticamente. Supponiamo di aver già risolto il problema da un punto di vista grafico, (v.fig.4) così come visto nei capitoli precedenti ed utilizzando vettori paralleli agli assi x ed y.

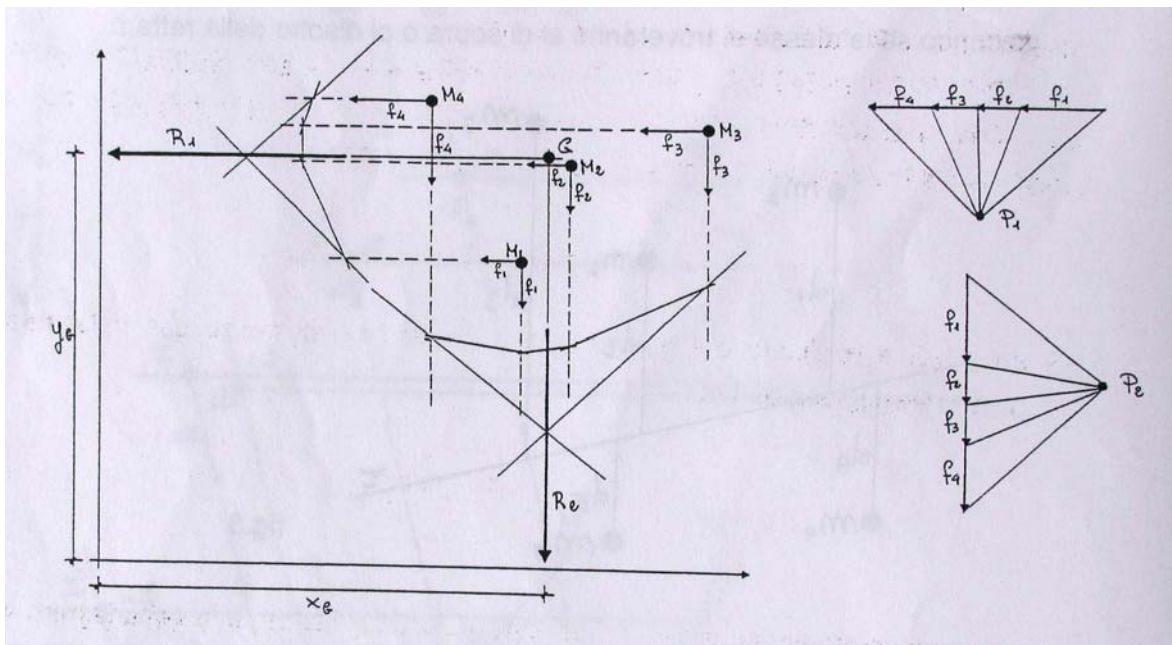


fig.4

$$S_x = \sum M_i \cdot y_i = Y_G \cdot \sum M_i \quad \text{per cui} \quad Y_G = \frac{S_x}{\sum M_i}$$

$$S_y = \sum M_i \cdot x_i = X_G \cdot \sum M_i \quad \text{per cui} \quad X_G = \frac{S_y}{\sum M_i}$$

Possiamo calcolare analiticamente le coordinate del baricentro sfruttando la definizione di momento statico.

Sappiamo che il momento statico rispetto all'asse di riferimento x è dato dalla sommatoria dei prodotti delle masse per le distanze dall'asse x, per cui possiamo scrivere:

$$S_x = M_1 \cdot y_1 + M_2 \cdot y_2 + M_3 \cdot y_3 + M_4 \cdot y_4$$

$$\text{ovvero: } S_x = \sum M_i \cdot y_i$$

dove y_i sono le distanze delle masse dall'asse x.

Applicando il teorema di Varignon, possiamo sostituire alla sommatoria la somma totale delle masse concentrata nel baricentro del sistema di masse per cui la precedente relazione può essere scritta alla seguente maniera:

$$S_x = Y_G \cdot \sum M_i$$

dove Y_G è l'ordinata del baricentro G del sistema di masse che dalla relazione precedente risulta pari a:

$$Y_G = \frac{S_x}{\sum M_i}$$

ragionando analogamente, è possibile calcolare l'ascissa del baricentro G del sistema di masse, che risulterà pari a:

$$X_G = \frac{S_y}{\sum M_i}$$

BARICENTRO DI LINEE - SUPERFICI - VOLUMI

Il baricentro di figure abbastanza semplici, dotate di assi di simmetria può essere trovato in modo molto elementare, sfruttando il principio che se una figura ammette un asse di simmetria, il baricentro della figura giace sul medesimo asse di simmetria e nel caso in cui la figura ammette più assi di simmetria, il baricentro della figura sarà individuato dall'intersezione degli assi di simmetria.(v.fig.5)

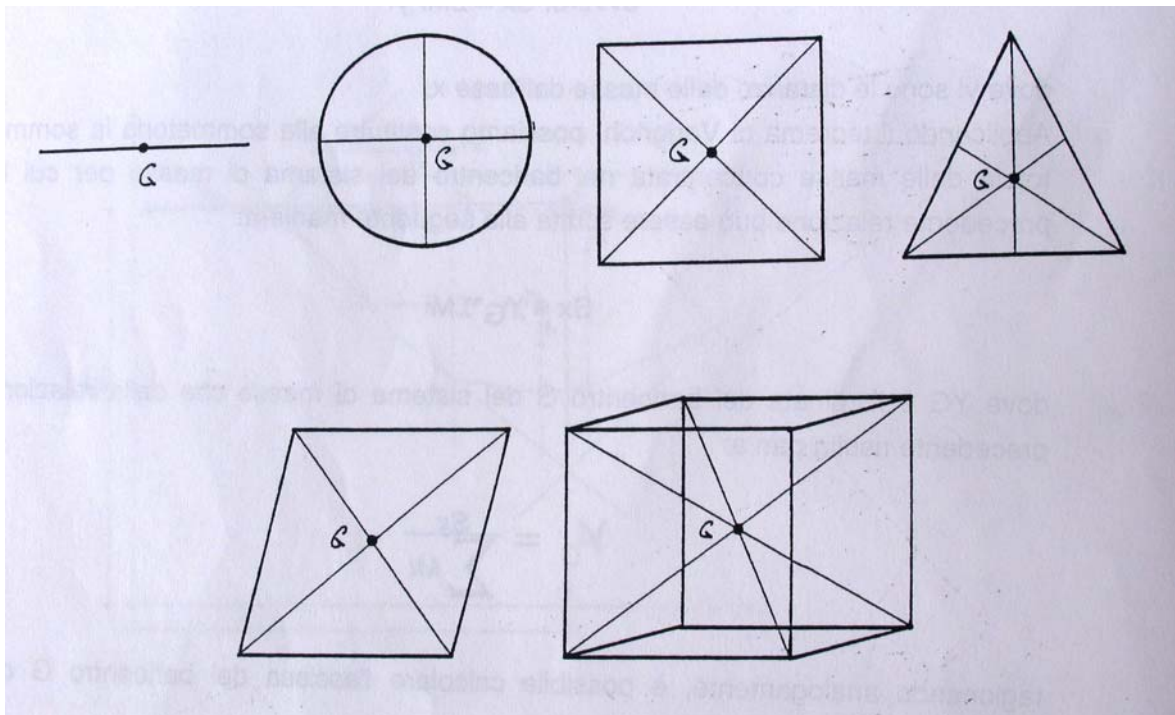


fig.5

Nel caso di un segmento, il baricentro sarà posizionato nel punto medio del segmento; in un cerchio il baricentro si trova nell'intersezione di due diametri; per il quadrato è sufficiente tracciare le due diagonali; nel triangolo lo otterremo tracciando le mediane (è utile ricordare che nel caso del triangolo, il baricentro G si trova ad $1/3$ dell'altezza rispetto alla base ed a $2/3$ rispetto al vertice opposto); nel caso di un parallelogramma o di un cubo è anche qui sufficiente tracciare le diagonali.

Per quanto riguarda, invece, quadrilateri irregolari, (v.fig.6) ad es. nel caso del quadrilatero ABCD, lo dividiamo in due triangoli ABC ed ADC, e troviamo i baricentri G_1 e G_2 dei due triangoli; successivamente, lo stesso quadrilatero verrà diviso in altri due triangoli ADB ed BCD di cui troveremo i rispettivi baricentri G_3 e G_4 . Unendo G_1 con G_2 e G_3 con G_4 , avremo che il baricentro del quadrilatero ci sarà dato dall'intersezione dei segmenti $\overline{G_1G_2}$ e $\overline{G_3G_4}$.

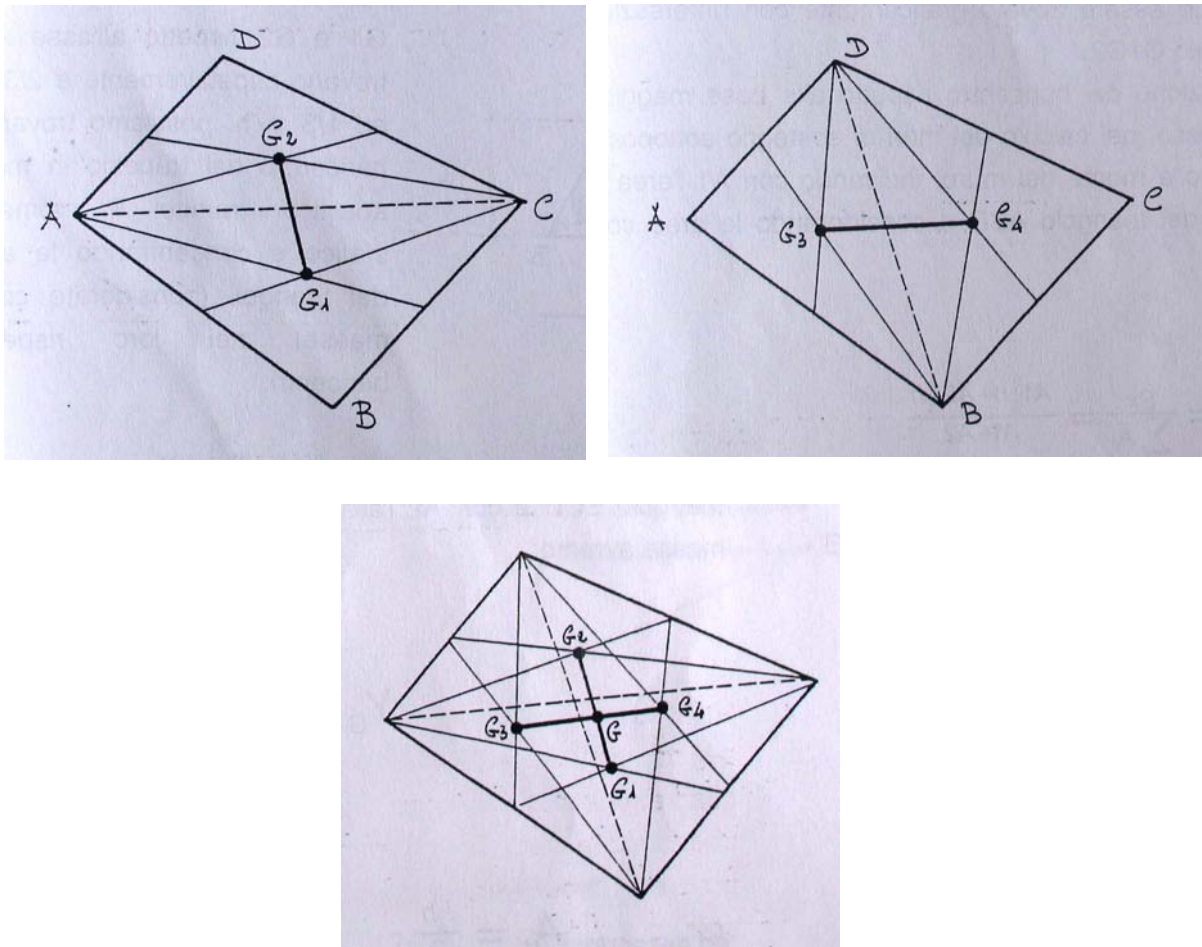
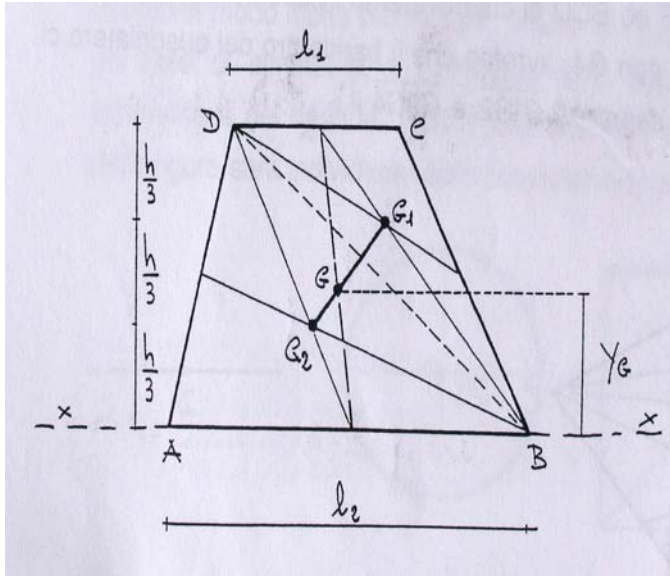


fig.6

BARICENTRO DI UN TRAPEZIO



Possiamo trovare il baricentro di un trapezio (v.fig.7) dividendo il trapezio in due triangoli BDC ed ABD e ricordando che i baricentri G1 e G2 rispetto all'asse x si trovano rispettivamente a 2/3 ed ad 1/3 di h, possiamo trovare il baricentro del trapezio in modo analitico tramite il momento statico e concentrando le aree dei triangoli (considerate come masse) nei loro rispettivi baricentri.

fig.7

Naturalmente il baricentro G può essere trovato graficamente con l'intersezione della mediana MN con il segmento G1G2.

Se vogliamo conoscere la posizione del baricentro rispetto alla base maggiore, problema questo ricorrente, spesso, nel calcolo dei muri di sostegno sottoposti a spinta del terreno e sovraccarico a monte del muro, indicando con A1 l'area del triangolo BCD e con A2 l'area del triangolo ABD e considerando le aree come masse avremo:

$$Y_G = \frac{\sum Sx}{\sum A_i} = \frac{A1\frac{2}{3}h + A2\frac{1}{3}h}{A1 + A2}$$

ed essendo $A_1 = \frac{l_1 h}{2}$ ed $A_2 = \frac{l_2 h}{2}$

sostituendo avremo:

$$Y_G = \frac{\left(\frac{l_1 h}{2}\right)\left(\frac{2h}{3}\right) + \left(\frac{l_2 h}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)}{\left(\frac{l_1 h}{2}\right) + \left(\frac{l_2 h}{2}\right)} = \frac{\frac{l_1 h^2}{3} + \frac{l_2 h^2}{6}}{\frac{l_1 h + l_2 h}{2}} = \frac{\frac{2l_1 h^2 + l_2 h^2}{6}}{\frac{l_1 h + l_2 h}{2}} = \frac{2l_1 h^2 + l_2 h^2}{6} \left(\frac{2}{l_1 h + l_2 h}\right)$$

$$Y_G = \frac{h(2l_1 + l_2)}{3} \frac{1}{l_1 + l_2}$$

in definitiva la posizione del baricentro, rispetto la base maggiore, ci sarà data dalla seguente formula:

$$Y_G = \frac{h}{3} \frac{2l_1 + l_2}{l_1 + l_2}$$

Per quanto riguarda, inoltre, la ricerca grafica del baricentro, (v.fig.8) la cosa migliore è quella di disporre un segmento di lunghezza pari alla base maggiore consecutivamente alla base minore, (DC +CE), ed un'altro segmento FA pari alla base minore accanto alla base maggiore, (FA + AB), unendo gli estremi F ed E e tracciando la mediana M1-M2 dall'intersezione di questi due segmenti otterremo il baricentro G del trapezio.

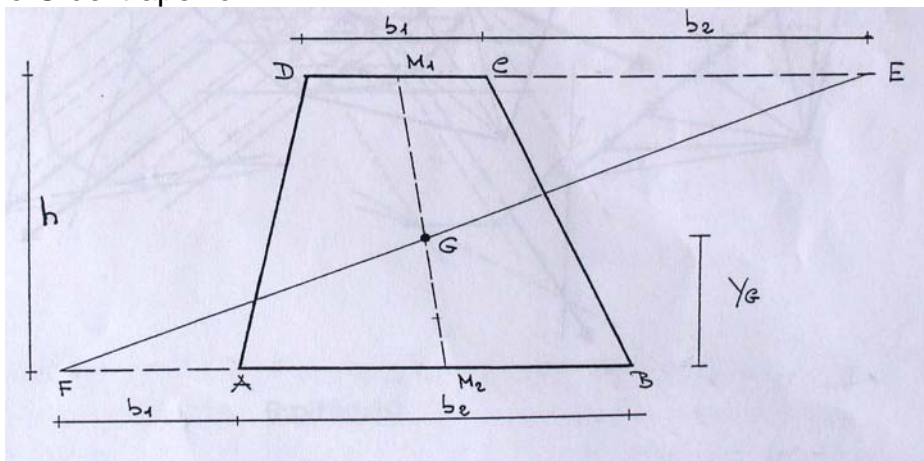


fig.8

BARICENTRO DI UN POLIGONO

Avendo un poligono qualsiasi, (v.fig.9) possiamo applicare la stessa procedura vista per il baricentro di un sistema di masse, suddividendo il poligono in triangoli e considerando le aree dei singoli triangoli come vettori applicati nei baricentri dei rispettivi triangoli. Con il poligono delle forze ed il poligono funicolare troviamo il risultante dei vettori (rappresentativi delle aree dei triangoli) aventi una direzione a piacere, dopodiché sempre con un nuovo poligono delle forze e funicolare troviamo un'altro risultante dei medesimi vettori aventi un'altra direzione. Nell'intersezione delle rette d'azione dei due risultanti trovati, avremo il baricentro cercato.

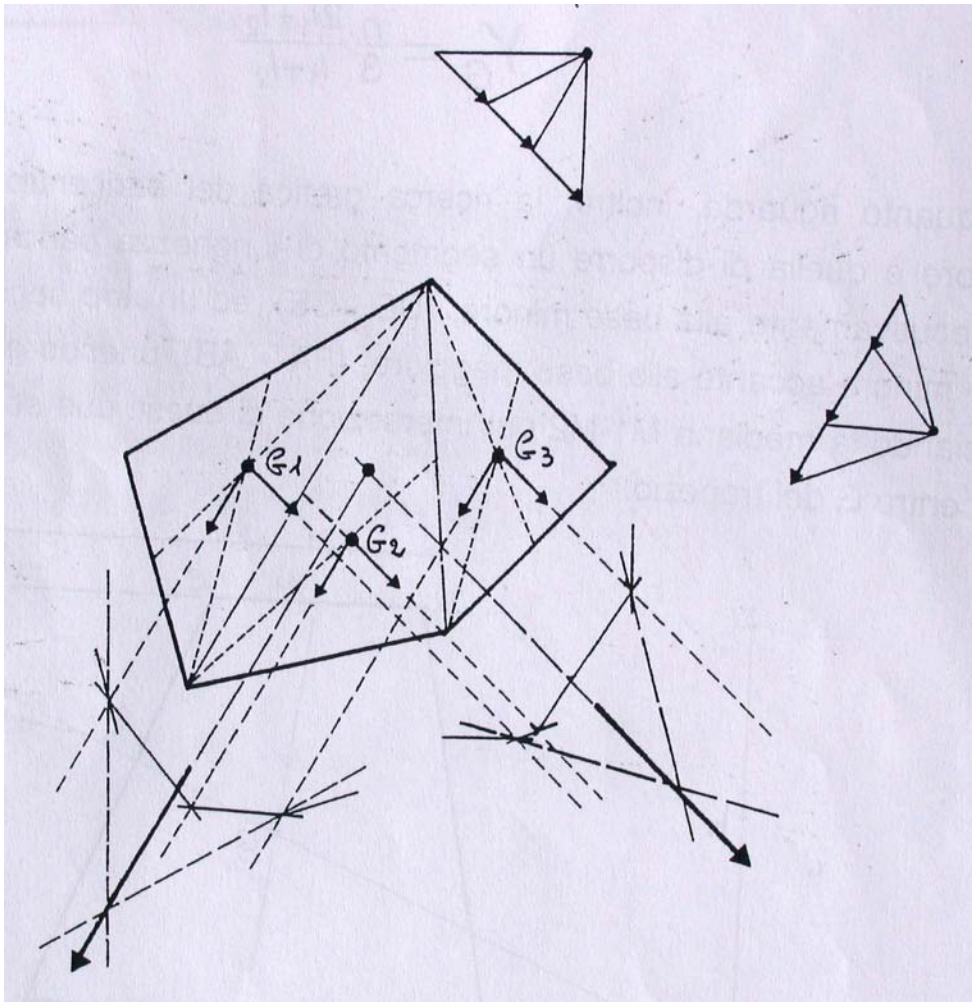


fig.9

BARICENTRO DI UNA FIGURA QUALUNQUE

Per la ricerca del baricentro di una figura a forma generica, dividiamo la figura in tante parti con rette parallele tra loro. Il numero di suddivisioni è a nostra scelta, a seconda del grado di precisione che vogliamo ottenere, chiaramente quanto più sono fitte le suddivisioni tanto più dovrebbe essere preciso il risultato finale, a meno di non commettere errori grafici. Nel baricentro dell'area di ogni parte applichiamo dei vettori proporzionali alle rispettive aree, paralleli e con verso uguali. Dopodiché, con la stessa procedura vista in precedenza, applicando in successione, due volte, il poligono delle forze e funicolare, nell'intersezione delle rette d'azione dei risultanti troviamo il baricentro della figura. (v.fig.10).

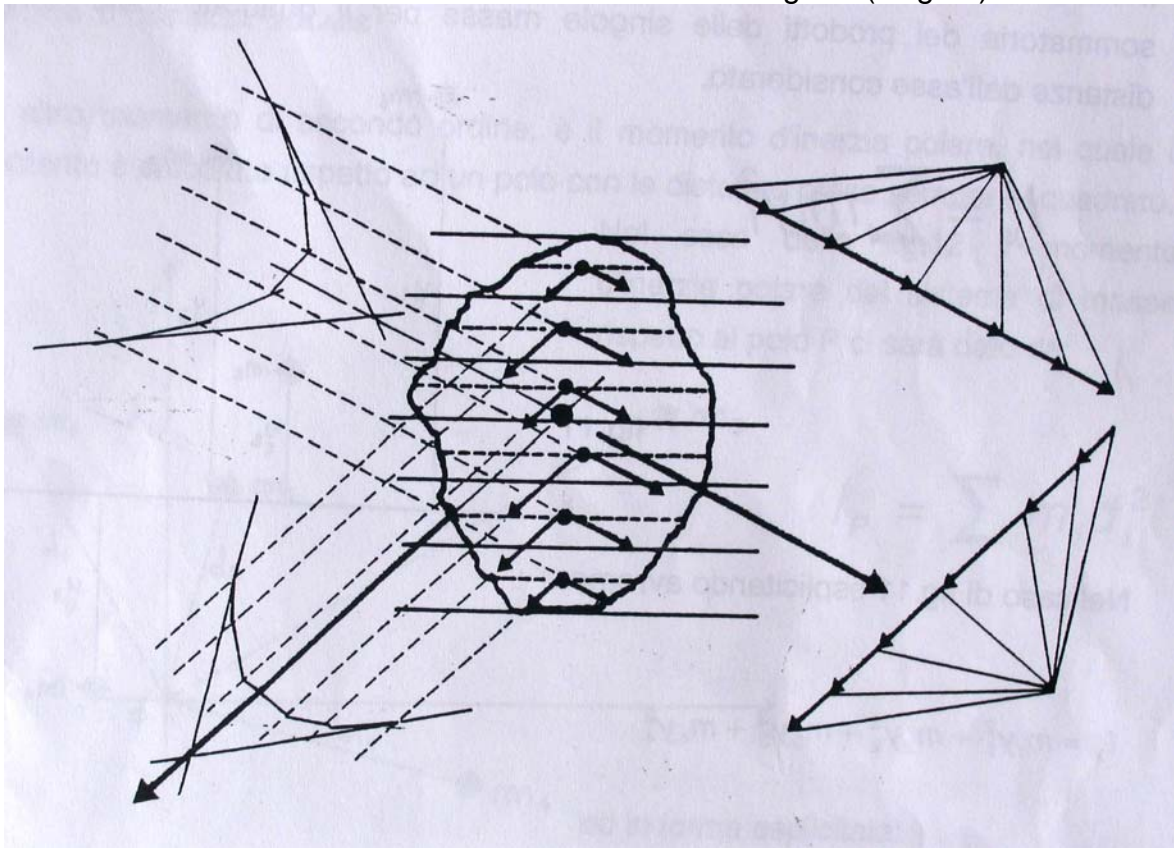


fig.10

MOMENTI D'INERZIA

I momenti statici di cui abbiamo parlato finora sono momenti del primo ordine nel senso che le distanze avevano esponente pari ad 1.

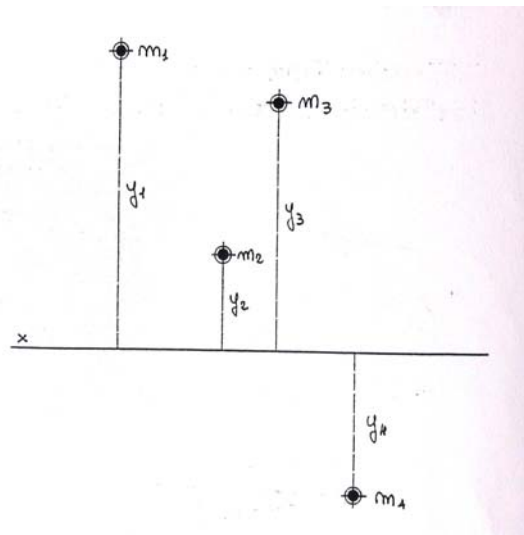
Andiamo adesso a vedere dei momenti del secondo ordine, cioè momenti in cui le distanze sono espresse al quadrato.

MOMENTO D'INERZIA ASSIALE

Il momento d'inerzia assiale di un sistema di masse viene definito come la sommatoria dei prodotti delle singole masse per il quadrato delle rispettive distanze dall'asse considerato.

$$I_x = \sum m_i y_i^2$$

fig.11



Nel caso di fig.11 esplicitando avremo:

$$I_x = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 + m_4 y_4^2$$

come si vede il segno negativo che dovrebbe avere y_4 ha poca importanza poiché esso è elevato al quadrato ed il quadrato di un numero come sappiamo è sempre positivo. Va precisato, inoltre, che le distanze non necessariamente

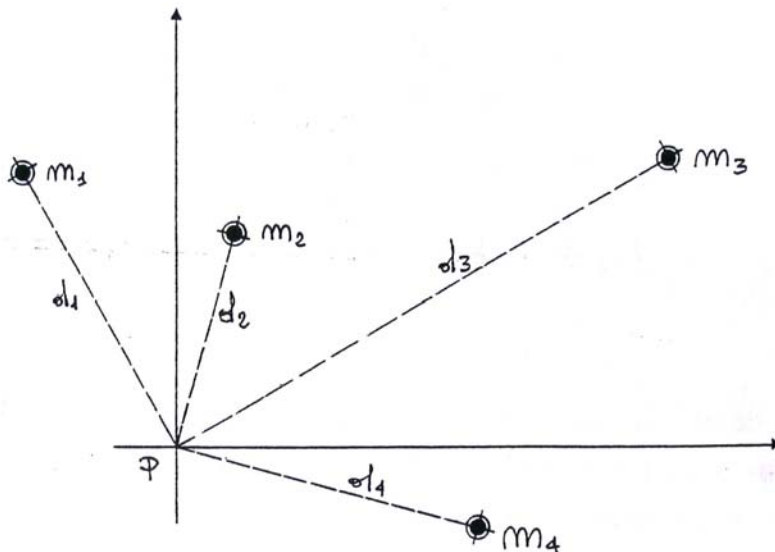
debbono essere valutate perpendicolarmente all'asse di riferimento, ma possono essere prese anche secondo una direzione qualsiasi, purché sempre parallelamente tra loro.

Possiamo dedurre, quindi, che mentre il momento statico può essere maggiore, minore od uguale a zero, il momento d'inerzia invece, è sempre una quantità positiva o al massimo pari a zero, quando le masse si trovano sulla retta di riferimento e le distanze, pertanto, sono nulle.

MOMENTO D'INERZIA POLARE

Un altro momento di secondo ordine, è il momento d'inerzia polare, nel quale il momento è calcolato rispetto ad un polo con le distanze prese sempre al quadrato.

Nel caso della fig.12 il momento d'inerzia polare del sistema di masse rispetto al polo P ci sarà dato da:



$$I_P = \sum m_i d_i^2$$

ed in forma esplicitata:

$$I_P = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^2 + m_4 d_4^2$$

MOMENTO CENTRIFUGO

Avendo un sistema di assi, ad es. x,y ed un sistema di masse, il momento dato dal prodotto delle masse per il prodotto delle distanze riferite sia all'asse x che all'asse y viene chiamato momento centrifugo.

Anche in questo caso le distanze non debbono essere valutate necessariamente perpendicolari agli assi, ma secondo determinate direzioni purché parallele tra loro.

Nel caso della fig.13 il momento centrifugo del sistema di masse rispetto agli assi di riferimento sarà pari a:

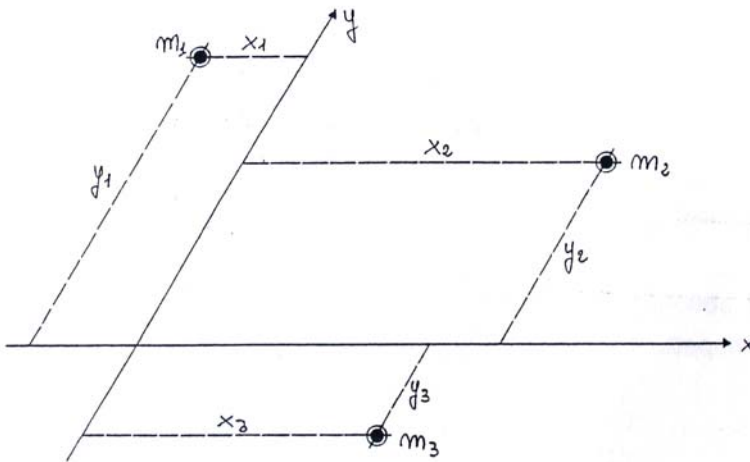


fig.13

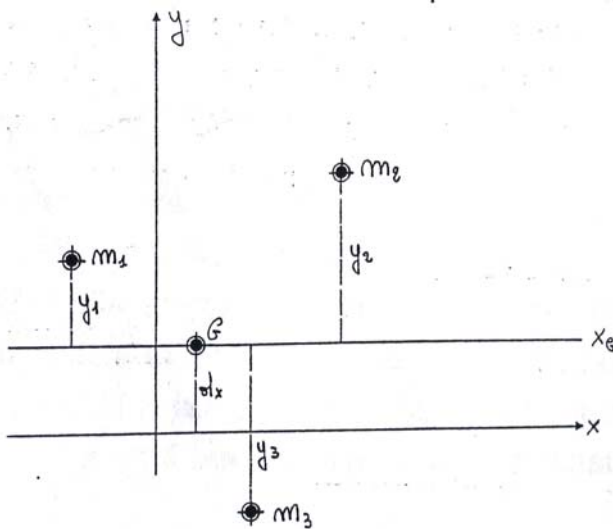
ed in forma esplicitata:

$$I_{xy} = m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3$$

E' da precisare che nel caso del momento centrifugo, a differenza dei momenti d'inerzia assiale e polare, per i prodotti delle distanze, bisogna tenere conto dei segni positivi o negativi a seconda se le distanze possono essere configurate come ascissa od ordinata positiva o negativa rispetto il sistema d'assi di riferimento. Così ad esempio nel caso di fig.13 risulterà x1 negativo, y1 positivo, x2 ed y2 positivi, x3 positivo, y3 negativo.

TEOREMA DI HUYGENS O DEL TRASPORTO

Avendo un sistema di masse m_1, m_2, m_3 , ed un asse XG passante per il baricentro G del sistema di masse, (v.fig.14), vogliamo trovare il momento d'inerzia di questo sistema di masse rispetto ad un asse X parallelo ad XG .



L'espressione del momento d'inerzia rispetto all'asse x è dato da:

fig.14

esplicitando avremo:

$$I_x = m_1(y_1 + d_x)^2 + m_2(y_2 + d_x)^2 + m_3(y_3 - d_x)^2$$

$$I_x = m_1(y_1^2 + d_x^2 + 2y_1d_x) + m_2(y_2^2 + d_x^2 + 2y_2d_x) + m_3(y_3^2 + d_x^2 - 2y_3d_x)$$

$$I_x = m_1y_1^2 + m_1d_x^2 + m_12y_1d_x + m_2y_2^2 + m_2d_x^2 + m_22y_2d_x + m_3y_3^2 + m_3d_x^2 - m_32y_3d_x$$

raggruppando e mettendo in evidenza avremo:

$$I_x = (m_1y_1^2 + m_2y_2^2 + m_3y_3^2) + d_x^2(m_1 + m_2 + m_3) + 2d_x(m_1y_1 + m_2y_2 - m_3y_3)$$

a questo punto va notato che:

a) il primo gruppo di termini tra parentesi è la sommatoria delle masse per le distanze dall'asse baricentrale XG prese al quadrato, per cui non è altro che il momento d'inerzia del sistema di masse rispetto all'asse baricentrale XG.

b) il secondo termine non è altro che la sommatoria delle masse per la distanza tra i due assi (XG ed X) presa al quadrato.

c) il trinomio tra parentesi presente nel terzo termine rappresenta il momento statico delle masse rispetto al baricentro del sistema di masse, e se per il teorema di Varignon sostituiamo alle masse la massa risultante, siamo in presenza del momento statico di una massa rispetto al proprio baricentro che poi a sua volta è uguale a zero in quanto la distanza tra massa e baricentro è nulla.

In definitiva possiamo quindi scrivere che il momento d'inerzia I_x del sistema di masse rispetto all'asse X parallelo all'asse XG si riduce solamente ai primi due termini fin ora trovati:

$$I_x = (m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2) + d_x^2 (m_1 + m_2 + m_3)$$

che possiamo scrivere in forma compatta alla seguente maniera:

$$I_x = \sum m_i y_i^2 + d_x^2 \sum m_i$$

e ricordando che il primo termine è il momento d'inerzia del sistema di masse rispetto all'asse baricentrale XG, possiamo scrivere:

$$I_x = I_{XG} + d_x^2 \sum m_i$$

possiamo pertanto enunciare il seguente **teorema del trasporto**:

dato un sistema di masse, il momento d'inerzia del sistema di masse rispetto ad un asse X è pari al momento d'inerzia del sistema di masse rispetto all'asse baricentrale parallelo all'asse X, sommato del prodotto della distanza al quadrato tra i due assi per la sommatoria delle masse.

Note :

BARICENTRO DEI MOMENTI STATICI O CENTRO RELATIVO

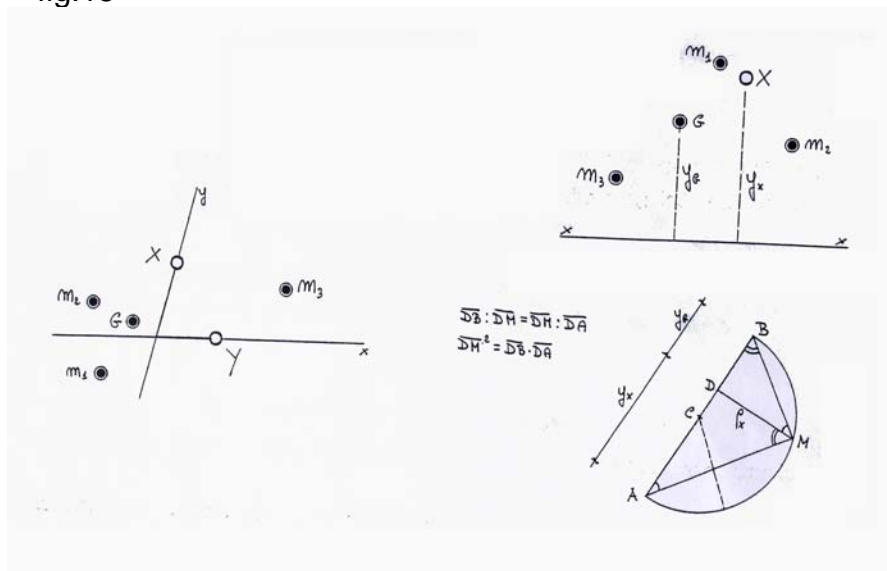
In precedenza, abbiamo detto che il momento d'inerzia di un sistema di masse rispetto ad un asse X è pari alla sommatoria delle masse per le distanze al quadrato ed abbiamo scritto ciò nella seguente forma compatta:

$$I_x = \sum m_i y_i^2$$

questa formula può essere scritta anche alla seguente maniera:

$$I_x = \sum (m_i y_i) y_i$$

fig.15



in cui $m_i y_i$ non sarebbe altro che un momento statico che a sua volta viene moltiplicato per una distanza y_i e ricordando che il momento statico è dato dal prodotto di una massa per una distanza, possiamo pensare il momento d'inerzia come momento statico del momento statico per cui se $m_i y_i$ sono intese come masse momenti statici, la sommatoria di queste masse momenti statici, per il teorema di Varignon, può essere concentrata nel proprio baricentro che è posizionato ad una certa distanza Y_X dall'asse x,(v.fig.15) per cui possiamo scrivere che:

$$I_x = \sum (m_i y_i) y_i = \left[\sum (m_i y_i) \right] Y_x$$

ovvero: $I_x = Y_x \sum m_i y_i$

ed applicando di nuovo il teorema di Varignon, concentrando la sommatoria delle masse nel proprio baricentro, possiamo scrivere:

$$I_x = Y_x \left(\sum m_i \right) Y_G$$

ovvero:

$$I_x = Y_x Y_G \sum m_i$$

avendo indicato con G il baricentro del sistema di masse e con X il baricentro dei momenti statici (pensati come masse) che può essere anche chiamato "centro relativo".

RAGGIO D'INERZIA

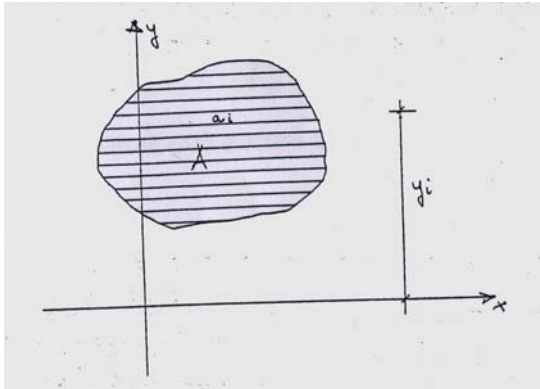
Ricordando nuovamente la definizione del momento d'inerzia, indicando il prodotto $Y_x Y_G$ con ρ_x^2 possiamo scrivere l'espressione del momento d'inerzia, alla seguente maniera:

$$I_x = \rho_x^2 \sum m_i$$

ove ρ_x è detto "raggio d'inerzia" ed è la distanza dove occorre concentrare il risultante delle masse per ottenere il momento d'inerzia.

MOMENTO D'INERZIA DI UNA FIGURA PIANA QUALSIASI

Per calcolare il momento d'inerzia di una generica figura piana (v.fig16) è sufficiente dividere la figura in tante strisce elementari, tracciando delle parallele, dopodiché si calcolano e si sommano i momenti d'inerzia delle strisce assimilando per comodità ogni striscia ad un'area di una o più figura geometrica.



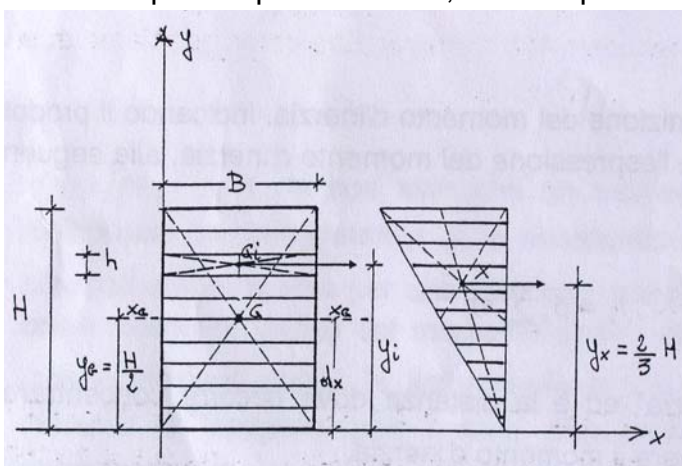
Possiamo, quindi, scrivere che:

I_x

fig.16

MOMENTO D'INERZIA DI UN RETTANGOLO, RISPETTO ALLA BASE

Tra le figure geometriche di cui più ci interessa conoscere il momento d'inerzia, il rettangolo sicuramente è quello che assume carattere prioritario, in quanto la sua conoscenza ci consente di ricavare i momenti d'inerzia delle sezioni che spesso si usano nella pratica professionale, ovvero quelle scomponibili in rettangoli.



Abbiamo visto, in precedenza, che il momento d'inerzia può essere anche visto come prodotto del momento statico, (considerato come massa) concentrato nel baricentro del momento statico X (centro relativo), per la distanza y_X di tale baricentro dall'asse di riferimento.

fig.17

Come al solito, indicando con S_x il momento statico del rettangolo rispetto all'asse x, (v.fig.17) possiamo scrivere:

$$I_x = S_x Y_x$$

Supponiamo, adesso, di dividere il rettangolo in tante strisce elementari, il momento statico della striscia i -esima S_{ix} per definizione sarà dato dall'area della striscia per la distanza dal baricentro della striscia i -esima all'asse x ovvero da:

$$S_{ix} = (Bh)y_i$$

volendo ora diagrammare il momento statico, rappresentando in scala un segmento per ogni striscia elementare, è da notare che essendo la larghezza B e l'altezza h (di ogni striscia) costante, mentre la distanza y_i varia a seconda della striscia che si considera, e precisamente cresce con l'allontanarsi dall'asse x, di conseguenza il segmento rappresentativo del momento statico di ogni striscia elementare, sarà più grande per la striscia 1 che risulta più lontana dall'asse x per poi diminuire per le altre strisce fino a ridursi al minimo per la striscia giacente sull'asse x. I segmenti rappresentativi dei momenti statici, quindi, saranno di lunghezza decrescente dall'alto verso il basso. Involuppando i segmenti, il diagramma del momento statico varierà linearmente e non sarà altro che un triangolo (v.fig.17) di cui sappiamo trovare il baricentro. Il baricentro dei momenti statici, quindi, coinciderà con il baricentro del triangolo che come sappiamo trovasi a $2/3$ di H rispetto all'asse x, pertanto, possiamo scrivere:

$$Y_x = \frac{2}{3}H$$

$$S_x = BH \frac{H}{2} = \frac{BH^2}{2}$$

sostituendo, pertanto, questi valori nella formula del momento d'inerzia, avremo che il momento d'inerzia di un rettangolo, calcolato rispetto ad un asse x giacente sulla base del rettangolo, sarà:

$$I_x = S_x Y_x = \frac{BH^2}{2} \frac{2}{3} H$$

ovvero:

$$I_x = \frac{BH^3}{3}$$

MOMENTO D'INERZIA DI UN RETTANGOLO, RISPETTO AD UN ASSE BARICENTRALE

Andiamo a vedere un altro caso notevole riguardante il rettangolo, ovvero il momento d'inerzia di un rettangolo, calcolato rispetto ad un asse passante per il baricentro G (v.fig.17).

Dal teorema di trasposizione, sappiamo che il momento d'inerzia rispetto all'asse x parallelo all'asse baricentrale X_G è pari a:

$$I_x = I_{XG} + d_x^2 \sum m_i$$

andando a sostituire in questa espressione i valori che conosciamo, ovvero

$I_x = \frac{BH^3}{3}$, d_x uguale ad $H/2$ e $\sum m_i$ pari all'area del rettangolo B per H, otteniamo:

$$\frac{BH^3}{3} = I_{XG} + \left(\frac{H}{2}\right)^2 BH$$

$$\frac{BH^3}{3} = I_{XG} + \frac{H^2}{4} BH$$

$$\frac{BH^3}{3} = I_{XG} + \frac{H^3}{4} B$$

$$\frac{BH^3}{3} - \frac{H^3 B}{4} = I_{XG}$$

$$\frac{4BH^3 - 3BH^3}{12} = I_{XG}$$

$$\frac{BH^3}{12} = I_{XG}$$

abbiamo ottenuto, quindi, che il momento d'inerzia baricentrale di un rettangolo è pari a:

$$I_{XG} = \frac{BH^3}{12}$$

Note :