ELEMENTI DI STATICA E DI MECCANICA DEL CONTINUO

La statica

GENERALITÀ

La statica tratta l'equilibrio dei corpi ed è inquadrabile in quella parte della fisica che è chiamata meccanica.
E' indispensabile, quindi, trattare la statica perché la progettazione e la realizzazione di qualsiasi tipo di costruzione od opera ingegneristica si basa sui principi di questa disciplina.
Qualsiasi tipo di costruzione, per essere affidabile e quindi COLLAUDABILE, deve obbedire alle leggi della statica.
Vediamo, pertanto, quali sono le condizioni necessarie affinché una costruzione sia collaudabile o non.
Una costruzione, per essere collaudabile deve rispondere a determinati requisiti e fra questi, quello certamente indispensabile è la SICUREZZA, si deve garantire cioè l'incolumità dell'utente.
Si deve, poi garantire l'AGIBILITA' del fabbricato quindi il suo uso.
Ciò implica che un'opera ingegneristica non è agibile se non è prima affidabile e sicura.
In questa sede, per comodità, separiamo il concetto di sicurezza da quello di agibilità. Il concetto di sicurezza chiama in causa la resistenza del materiale di cui è composta l'opera, mentre l'agibilità chiama in causa le deformazioni ovvero gli spostamenti della struttura. Si hanno, quindi, due criteri da seguire ai fini della collaudabilità di un'opera ingegneristica: quello di resistenza e quella di agibilità.
Se progettiamo un fabbricato senza aver effettuato il calcolo dei cedimenti delle fondazioni, pur avendo effettuato i calcoli relativi alla resistenza del terreno che deve ospitare la fondazione ed anche se questi calcoli ci dicono che non vi sono problemi, potrebbe capitare che, in fase di realizzazione del fabbricato, i cedimenti associati a quel tipo di fondazione e a quel tipo di struttura, non sono compatibili con l'uso del fabbricato.
Bisogna verificare la resistenza del complesso terreno-opera di fondazione, e calcolare anche i cedimenti fondali associati a quell'opera ingegneristica perché se i cedimenti sono tanto elevati da indurre ad esempio lesioni nelle tramezzature del

fabbricato od ondulazioni nel pavimento, è vero che l'opera dal punto di vista di sicurezza rimane integra perché non c'é pericolo per le vite umane, ma è pur vero che l'edificio non è agibile perché gli spostamenti non sono compatibili con le tompagnature del fabbricato.

Si capisce in modo spontaneo che il comportamento del fabbricato, dipende essenzialmente da due cose fondamentali: i carichi a cui esso è sottoposto, e la resistenza del materiale con cui è stato realizzato.

Un ruolo essenziale lo assumono quindi i carichi e la loro schematizzazione, che viene effettuata in termini di forze.

Dobbiamo quindi fare attenzione alla determinazione delle forze, dalle quali poi si originano altre forze interne alla struttura, per cui poi dobbiamo stabilire, dal punto di vista della resistenza, se queste forze interne possono essere sopportate dal materiale che costituisce la struttura. Per quanto riguarda l'agibilità, invece, dobbiamo determinare gli spostamenti, per effetto delle forze esterne applicate, e verificare se essi sono compatibili con le condizioni d'uso del fabbricato.

Sintetizzando quanto detto possiamo costruire il seguente schema:

COLLAUDABILITA'

CONDIZIONI NECESSARIE

INCOLUMITA'	AGIBILITA'
SICUREZZA	DEFORMAZIONI
RESISTENZA DEL MATERIALE	SPOSTAMENTI
CRITERIO DI RESISTENZA	CRITERIO DI AGIBILITA'
determinazione delle forze interne che si generano per effetto delle forze esterne applicate	determinazione degli spostamenti per effetto delle forze esterne applicate

in definitiva
occorre indagare su come le forze interagiscono tra loro: come si sommano o si elidono a vicenda, ecc.
occorre imparare a fare un nuovo tipo di calcolo: il calcolo vettoriale.
in definitiva bisogna imparare a fare delle operazioni con le forze.

Note :

Vettori

concetti generali

Le forze vengono rappresentate tramite degli enti chiamati <u>VETTORI</u>. I vettori sono l'espressione grafica di una grandezza (es. una forza definita come ente geometrico caratterizzato da: direzione, verso e punto di applicazione).

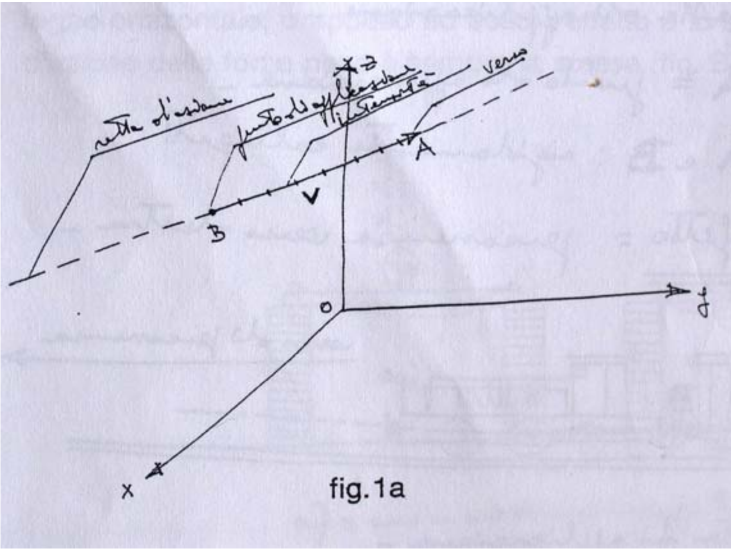


fig.1a

La retta su cui giace il vettore è detta retta di applicazione; nel punto A è definito il <u>verso</u>, in B il punto di applicazione (fig. 1a).
Il vettore può essere indicato in vario modo: **v**, $\xrightarrow{v}$, $\xrightarrow[v]{}$, **v**=(A-B)

l'ultima simbologia a destra, riportando prima A e poi B, indica che il vettore ha punto di applicazione B e verso in A.
La lettera v senza grassetto e senza freccetta, indica il modulo del vettore, cioè la quantità scalare della forza.
L'intensità del vettore è la lunghezza di esso che deve essere proporzionale alla sua intensità, ovvero la intensità del vettore deve essere rappresentata in una scala opportuna.
Se abbiamo una forza di 100 t non possiamo rappresentarla con una scala pari a 1 cm = 1 t , se non abbiamo a disposizione un foglio lungo almeno un metro.
Il punto di applicazione di una forza può essere trasportato lungo la retta di applicazione della forza purché il nuovo punto sia rigidamente collegato con il primo. Questo vuol dire che l'effetto di una forza non cambia se essa viene comunque spostata lungo la propria retta d'azione.

Questo concetto è meglio comprensibile osservando gli schemi proposti nelle figure che seguono.

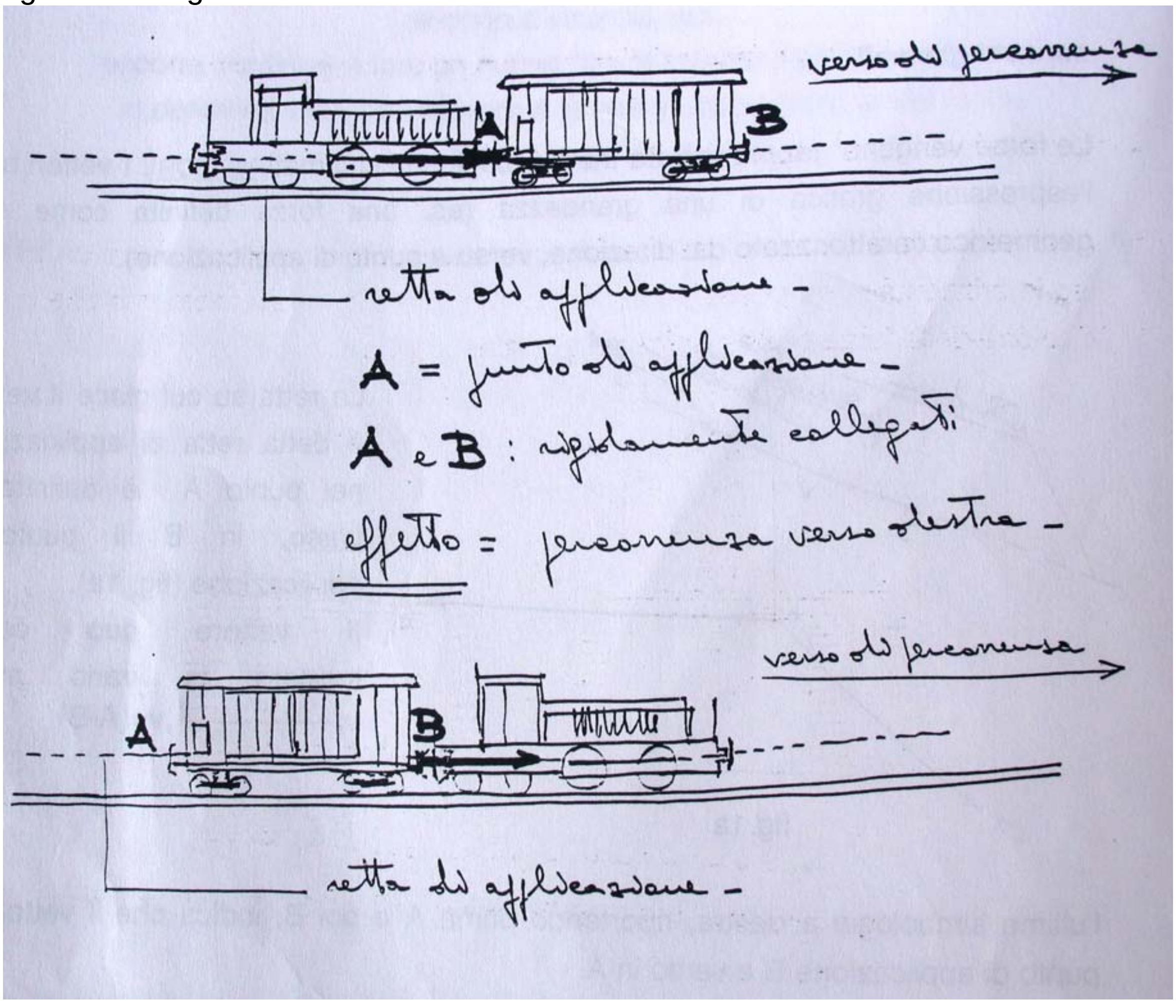


fig. A

Nell'esempio della locomotiva (fig. A), l'effetto di moto verso destra è esplicato sia con il carro davanti alla motrice che dietro poiché la forza applicata ha semplicemente scorso lungo la retta d'azione.

E' da notare che il punto A e il punto B sono rigidamente collegati.

Nei due casi cambia il punto di applicazione, ma l'effetto è lo stesso: il verso di percorrenza è lo stesso.

> **Il punto di applicazione di una forza può essere trasportato lungo la retta d'azione della forza, purché il nuovo punto sia rigidamente collegato con il primo.**

Abbiamo così introdotto anche il concetto di CORPO RIGIDO.

Quanto visto finora è da ritenersi valido in quanto, trascurando le piccole deformazioni, il vagone ferroviario è da considerarsi un corpo rigido.

CAMPO DI VALIDITA' = IPOTESI DI CORPI RIGIDI

Quanto asserito finora, ha validità quindi nell'ipotesi di corpi rigidi.

Altro esempio è il caso di un secchio pieno d'acqua appoggiato sopra un asse di legno orizzontale, o appeso ad esso: l'effetto è lo stesso dal momento che la retta d'azione della forza peso è sempre la stessa (fig. B).

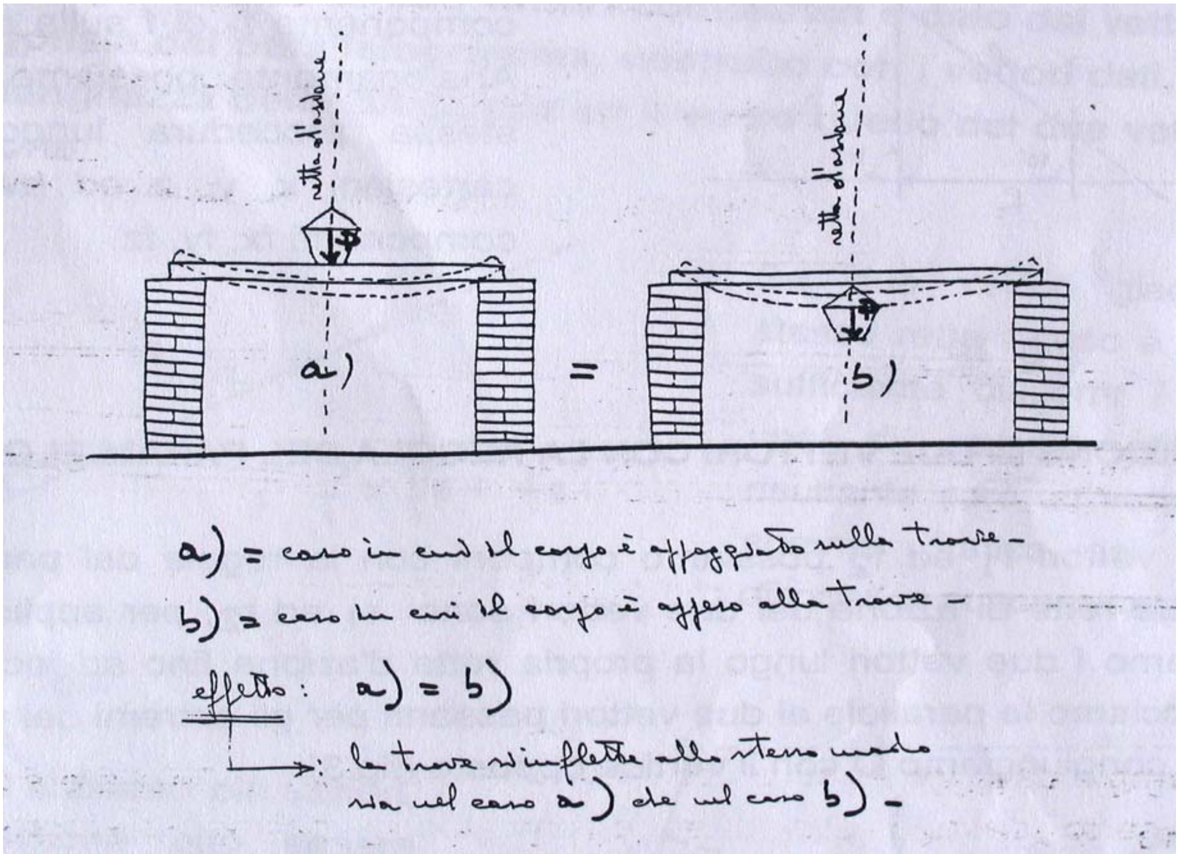


fig. B

CONCLUSIONI:

l'effetto di una forza non cambia se essa viene comunque spostata lungo la propria retta d'azione.

OPERAZIONI VETTORIALI

Composizione o scomposizione di vettori sono le corrispondenti operazioni di addizione e sottrazione tra scalari. Ci occuperemo prevalentemente di vettori giacenti su un piano anche per semplicità di procedura e di calcolo, nonché di rappresentazione.

Un vettore può essere definito anche tramite le sue componenti.

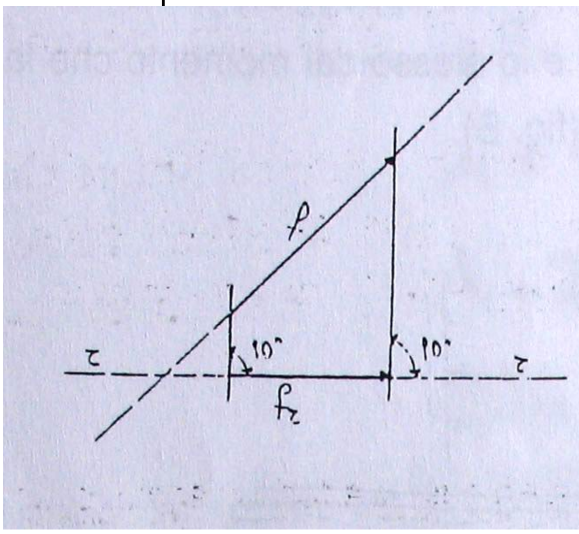


fig. 1b

Se abbiamo un vettore **f** ed una retta r, proiettando **f** su r abbiamo la componente $\mathbf{f}_r$ di **f** sulla retta r (fig.1b). Analogamente possiamo effettuare la stessa procedura lungo i tre assi cartesiani x, y, z ed avere quindi le componenti fx, fy, fz.

COMPOSIZIONE DI DUE VETTORI CON LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA:

Dati due vettori $\mathbf{f_1}$ ed $\mathbf{f_2}$ possiamo comporli con la regola del parallelogramma (fig.2a). Le rette di azione dei due vettori sono r_1 ed r_2, per applicare la regola trasportiamo i due vettori lungo la propria retta d'azione fino ad incontrarsi in O, dopo tracciamo le parallele ai due vettori passanti per gli estremi dei vettori (fig.2b) ed infine congiungiamo O con il vertice opposto (fig.3).

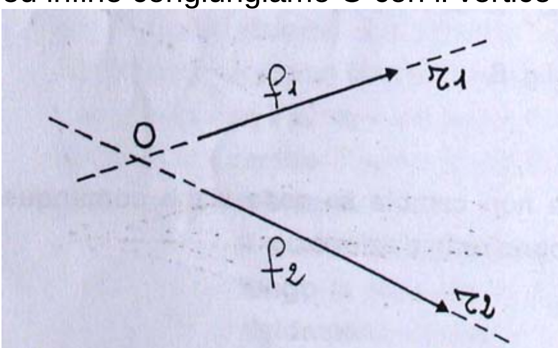


fig.2a

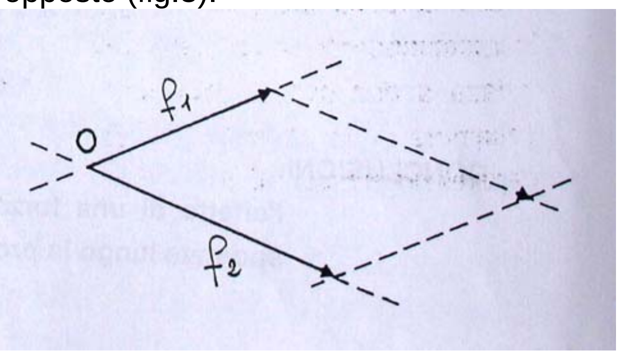
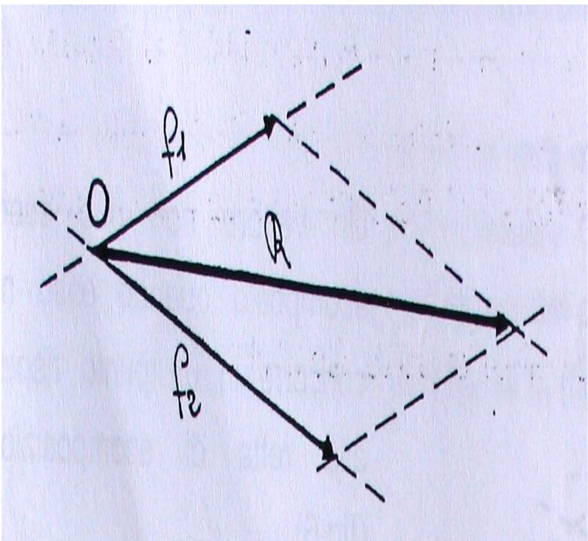


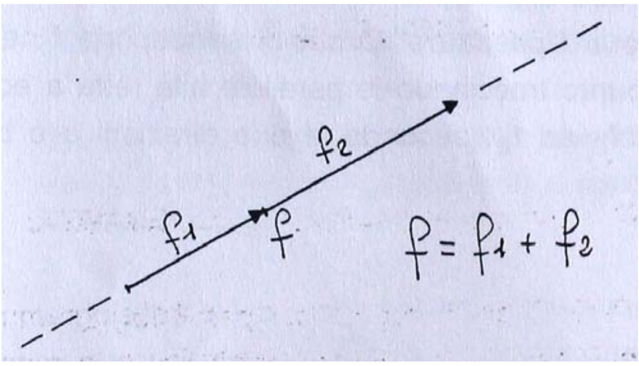
fig.2b



La risultante **R** sarà data dalla diagonale del parallelogramma, così ottenuta (fig.3). Il verso lo possiamo ottenere immaginando di spostare $\mathbf{f_1}$, mettendolo di seguito ad $\mathbf{f_2}$, ovvero sarà dato dal verso dei due vettori posizionati in successione. Lo stesso discorso lo possiamo fare con $\mathbf{f_2}$.

fig.3

In definitiva, **il risultante di due vettori complanari è dato dal vettore giacente sulla diagonale del parallelogramma, costruito con i vettori dati, l'intensità è pari alla lunghezza della diagonale ed il verso quello dei due vettori posti in successione**.



Se due vettori giacciono sulla stessa retta il caso è semplice : è sufficiente disporre i due vettori uno di seguito all'altro e la risultante sarà un vettore pari alla somma grafica dei due vettori disposti in successione.(vedi fig.4)

fig.4

quando poi abbiamo più vettori, la composizione può essere fatta a due a due, applicando sempre la regola del parallelogramma (fig.5).

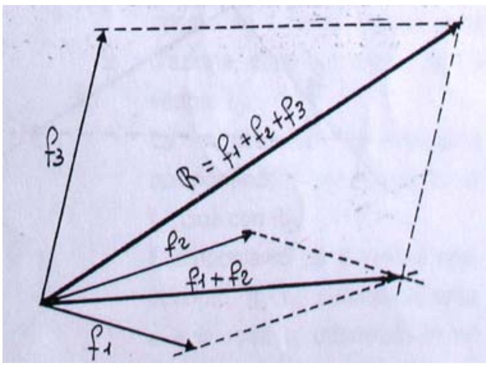
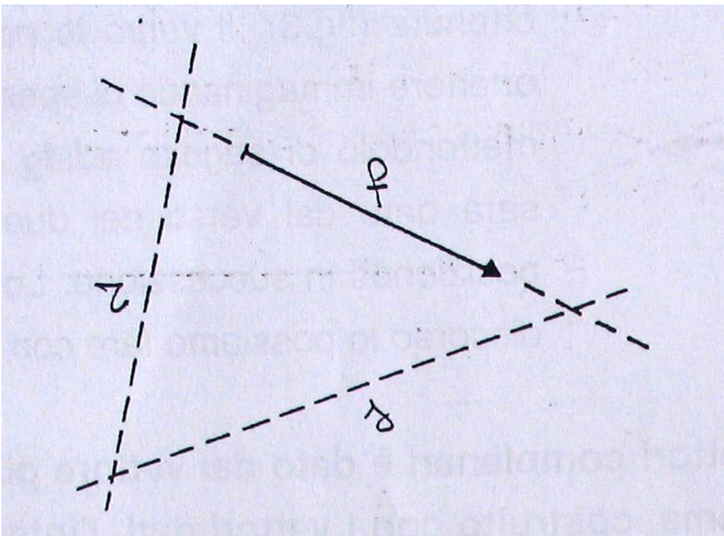


fig.5

SCOMPOSIZIONE DI VETTORI.



Un vettore non può essere scomposto quando esso non concorre in un punto rispetto alla retta di scomposizione (fig.6).

fig.6

Scomposizione di un vettore lungo due direzioni a, b che concorrono in uno stesso punto: la retta di applicazione di **f** passa per O quindi si trasporta **f** nel punto di applicazione O. A questo punto tracciando le parallele alla retta a ed alla retta b abbiamo le componenti $\mathbf{f}_b$ ed $\mathbf{f}_a$, secondo le due direzioni a e b (fig.7).

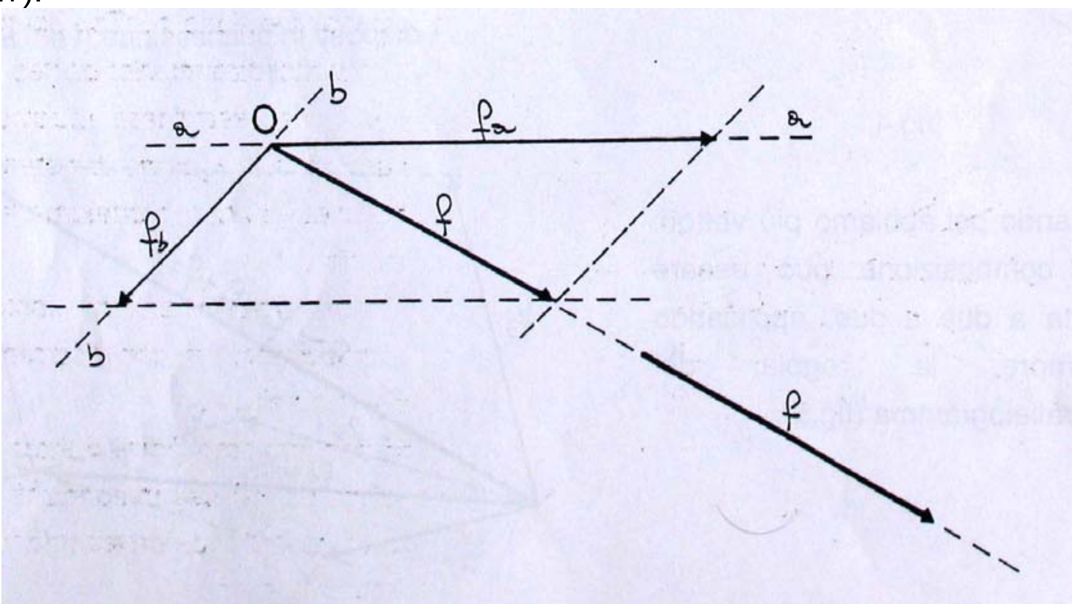
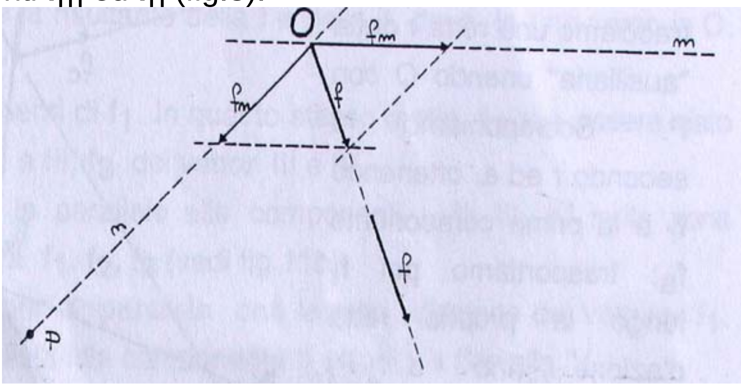


fig.7

SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE SECONDO UNA RETTA m ED UN PUNTO P.

Per scomporre il vettore **f** seconda la retta **m** ed il punto **P**, prolunghiamo **f** lungo la propria retta d'azione fino ad individuare O, poi uniamo P con O, avendo così ottenuto un'altra retta n, con la regola del parallelogramma scomponiamo **f** lungo m ed n ottenendo le componenti $\mathbf{f}_m$ ed $\mathbf{f}_n$ (fig.8).

fig.8



SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE SECONDO TRE DIREZIONI.

Si possono presentare due casi: quando le tre direzioni sono concorrenti in uno stesso punto (fig.9) e quando non lo sono (fig.10).

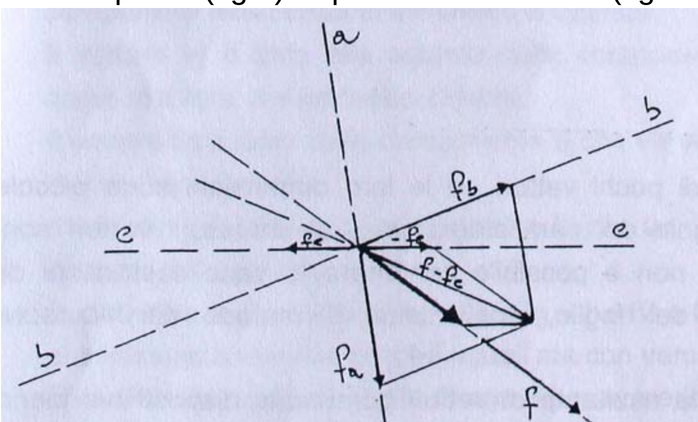


fig.9

Il vettore dato è **f**; lo vogliamo scomporre secondo tre direzioni concorrenti a, b e c. Scegliamo un vettore arbitrario, per es. $\mathbf{f}_c$, di un determinato modulo; spostiamo **f** lungo la sua retta d'azione, dopo sottraiamo ad **f** il vettore $\mathbf{f}_c$.

La sottrazione la facciamo componendo f con l'opposto di $\mathbf{f}_c$, cioè con $-\mathbf{f}_c$.

Scomponiamo poi il vettore così ottenuto ($\mathbf{f} - \mathbf{f}_c$) seconda la retta a e la retta b, ottenendo in tal modo $\mathbf{f}_a$ ed $\mathbf{f}_b$.

L'altra scomposizione, secondo tre direzioni non concorrenti nello stesso punto, si ottiene alla seguente maniera:

Trasportiamo il vettore **f** fino ad incontrare la retta a nel punto O, dal punto O tracciamo una retta r detta "ausiliaria" unendo O con P. Scomponiamo **f** secondo r ed a, ottenendo $\mathbf{f}_r$ e la prima componente $\mathbf{f}_a$; trasportiamo poi $\mathbf{f}_r$ lungo la propria retta d'azione fino a P, scomponendo $\mathbf{f}_r$ secondo le direzioni b e c, ottenendo così le altre due componenti $\mathbf{f}_c$ ed $\mathbf{f}_b$.

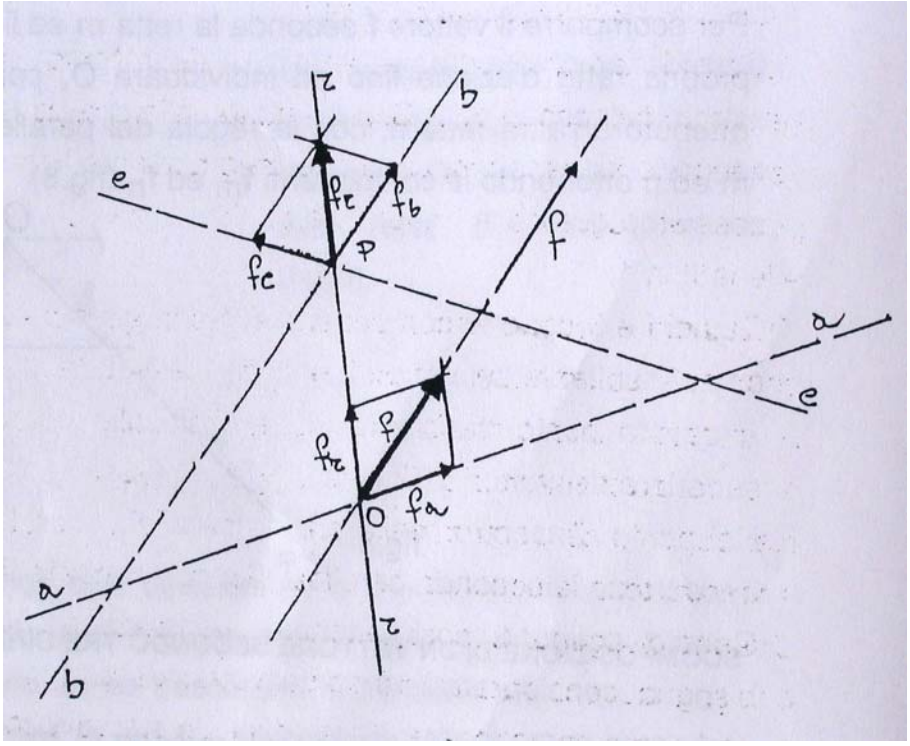


fig.10

POLIGONO FUNICOLARE

Quando siamo in presenza di pochi vettori e le loro dimensioni sono piccole, risulta facile applicare la regola del parallelogramma, se invece, i vettori sono disposti in maniera tale che non è possibile contenere le varie costruzioni del parallelogramma nel piano del foglio, applichiamo il metodo del POLIGONO FUNICOLARE.

Esso ci consente di trovare la risultante di vettori comunque disposti nel piano, anche se il punto d'incontro è al di fuori del piano di operazione. Vediamo come è possibile procedere : abbiamo tre vettori $\mathbf{f_1},\mathbf{f_2},\mathbf{f_3}$ e vogliamo calcolare la risultante dei tre senza applicare la regola del parallelogramma (fig.11a - fig.11b).

Costruiamo prima un poligono detto "poligono delle forze o dei vettori", disponendo in successione i tre vettori, trasportandoli parallelamente a se stessi. Ovviamente il tutto va fatto in scala (vedi fig.11a)
Consideriamo un punto arbitrario P, detto "polo" ed uniamo P con gli estremi dei vettori, quindi con 0, 1, 2, 3. Avremo delle componenti che sono I, II, III, IV, queste vengono chiamate così perché se guardiamo il triangolo 01P, formato da $\mathbf{f_1}$, I e II, possiamo guardare $\mathbf{f_1}$ come la risultante della I e della II, dove la I ha verso in O, e la II in 1.
Quindi I e II sono le componenti di $\mathbf{f_1}$. In questo stesso modo $\mathbf{f_2}$ può essere visto come risultante dei vettori II e III, $\mathbf{f_3}$ dei vettori III e IV.
A questo punto tracciamo le parallele alle componenti I, II, III, IV nella zona superiore dei vettori a sinistra $\mathbf{f_1}$**,** $\mathbf{f_2}$**,** $\mathbf{f_3}$ (vedi fig.11b).
Nel punto d'incontro della prima parallela con la retta d'azione del vettore $\mathbf{f_1}$, tracceremo la seconda parallela alla componente II e così via fino alla IV.
Questo poligono così ottenuto viene detto POLIGONO FUNICOLARE. Ora bisogna considerare il verso dei vettori del poligono.
La I come componente della $\mathbf{f_1}$, ha il verso rivolto verso destra, la componente II per il vettore $\mathbf{f_1}$ ha un verso, e per il vettore $\mathbf{f_2}$ quello opposto, e così via.
Le componenti II e III sono componenti sia di $\mathbf{f_1}$, ed $\mathbf{f_2}$ che di $\mathbf{f_2}$ ed $\mathbf{f_3}$.
e osservando la figura, si nota che sono uguali ma di verso opposto, per cui le componenti intermedie si eliminano a vicenda.
Il vettore $\mathbf{f_1}$ è dato alla somma della componente I che va verso destra più la componente II che va verso sinistra.
Il vettore $\mathbf{f_2}$ è dato dalla componente II che va verso destra più la componente III che va verso sinistra.
Il vettore $\mathbf{f_3}$ è dato dalla componente III che va verso destra più la componente IV che va verso sinistra.
In definitiva la risultante di $\mathbf{f_1} + \mathbf{f_2} + \mathbf{f_3}$ = I + IV = **R** in quanto le risultanti intermedie si eliminano a vicenda perché uguali ma con verso opposto.
E’ sufficiente, pertanto, unire O con 3 per avere la risultante **R**.
Possiamo trovare anche dove è applicato **R** prolungando sul poligono funicolare la retta d'azione della I e della componente IV ed applicando la regola del parallelogramma possiamo disegnarla e quindi conoscere la sua intensità.

In pratica, non è necessario effettuare la costruzione con la regola del parallelogramma, ma è sufficiente trasportare parallelamente **R** dal poligono delle forze fino all'intersezione delle rette su cui giacciono la prima e l'ultima componente.

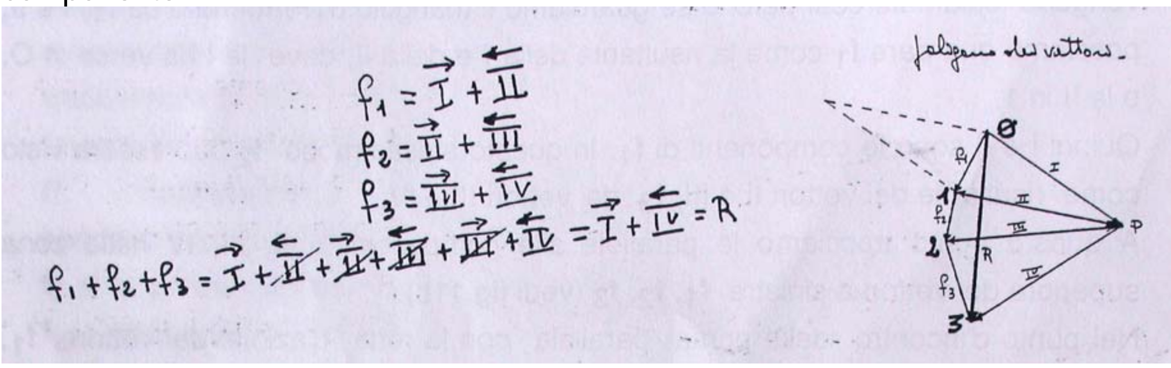


fig.11a

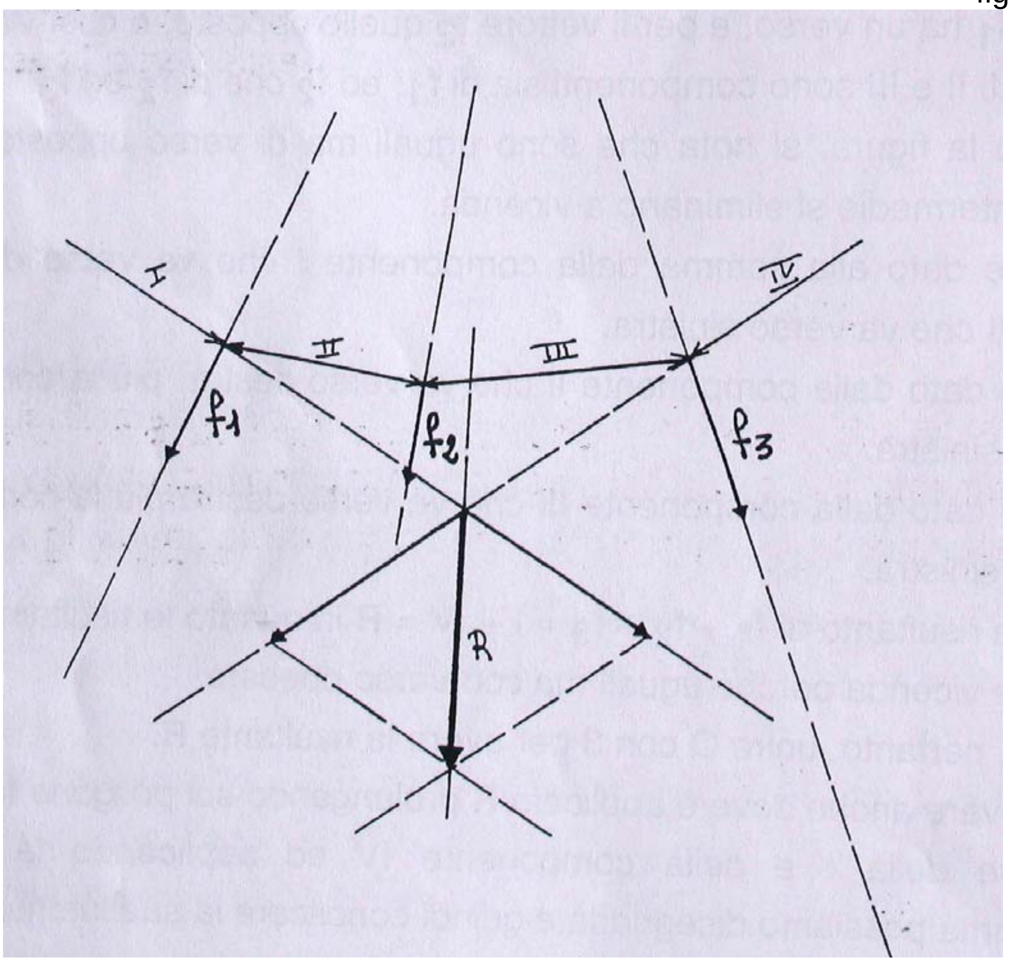
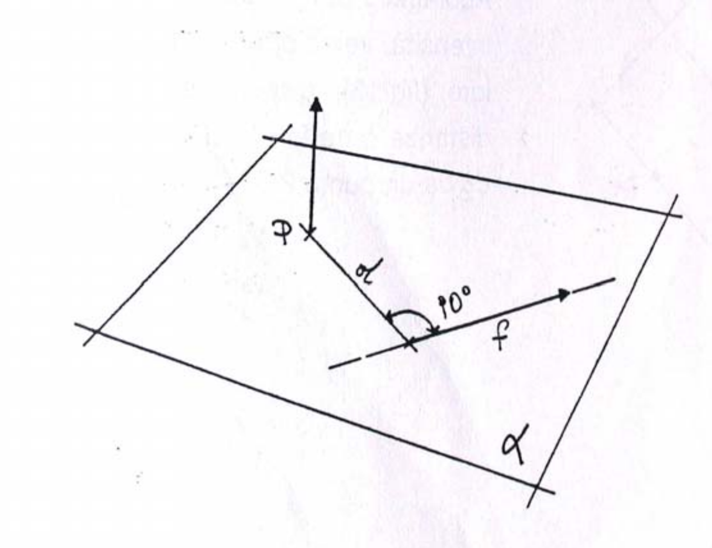


fig.11b

MOMENTO DI UN VETTORE RISPETTO AD UN POLO P

Abbiamo un piano α su cui giace un vettore **f** (fig.12), per avere il momento del vettore rispetto al punto, basta moltiplicare **f** per la distanza, cioé forza per braccio. In questo modo abbiamo il modulo del momento.



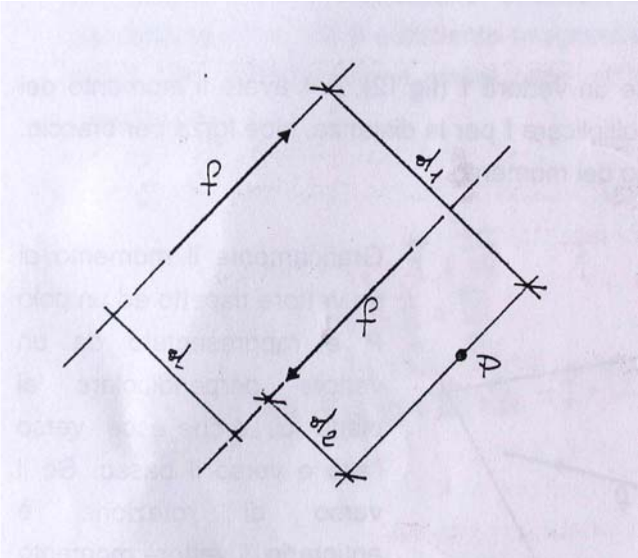
Graficamente il momento di un vettore rispetto ad un polo P è rappresentato da un vettore perpendicolare al piano α, e che esce verso l'alto o verso il basso. Se il verso di rotazione è antiorario, il vettore momento esce verso l'alto, viceversa, se il verso del momento è orario, il vettore momento esce verso il basso.

M= f x d

fig.12

E' la stessa procedura studiata in fisica, ove per comodità si stabilisce che il verso del vettore momento ci è fornito dal verso di avanzamento di una vite che si avvita con un momento avente lo stesso verso di rotazione del momento in esame.

MOMENTO DI UNA COPPIA



Abbiamo due vettori di uguale intensità, verso opposto e paralleli tra loro (fig.13), disposti ad una certa distanza d tra loro e a distanze d_1 e d_2 da un punto P.

fig.13

Calcoliamo il momento della coppia di vettori rispetto al punto P.
Il momento di questa coppia sarà data da $\mathbf{M} = \mathbf{f} \cdot d_1 - \mathbf{f} \cdot d_2$ in cui il segno dipende dalla convenzione adottata, ad esempio, il verso dei momenti sinistrorsi sarà negativo, e positivo quello dei momenti destrorsi.
In questo caso, pertanto, il momento in senso orario sarà positivo e l'altro negativo.

$$\mathbf{M} = \mathbf{f} \cdot d_1 - \mathbf{f} \cdot d_2 = \mathbf{f}(d_1 - d_2) = \mathbf{f} \cdot d$$

essendo $(d_1 - d_2) = d$

quindi in definitiva il momento di una coppia di vettori rispetto ad un polo non dipende dalla distanza della coppia rispetto al polo ma solo dalla distanza esistente tra i due vettori e dalla intensità dei vettori stessi.

$$\mathbf{M} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{d}$$

TEOREMA DI VARIGNON

Vediamo adesso come è possibile calcolare il MOMENTO DI UN SISTEMA DI VETTORI.
Algebricamente se abbiamo un insieme di vettori $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$, ... $\mathbf{f_n}$, rispetto ad un polo O (fig.14), il momento del sistema di vettori è dato dalla somma dei momenti dei singoli vettori rispetto al polo considerato O.
$\mathbf{f_1}$ = 2.5 t, $\mathbf{f_2}$ = 1.5 t, $\mathbf{f_3}$ = 1.4 t, d_1 = 6.40 m, d_2 = 9.40 m, d_3 = 9.80 m

calcoliamo il momento **M** rispetto al polo O:

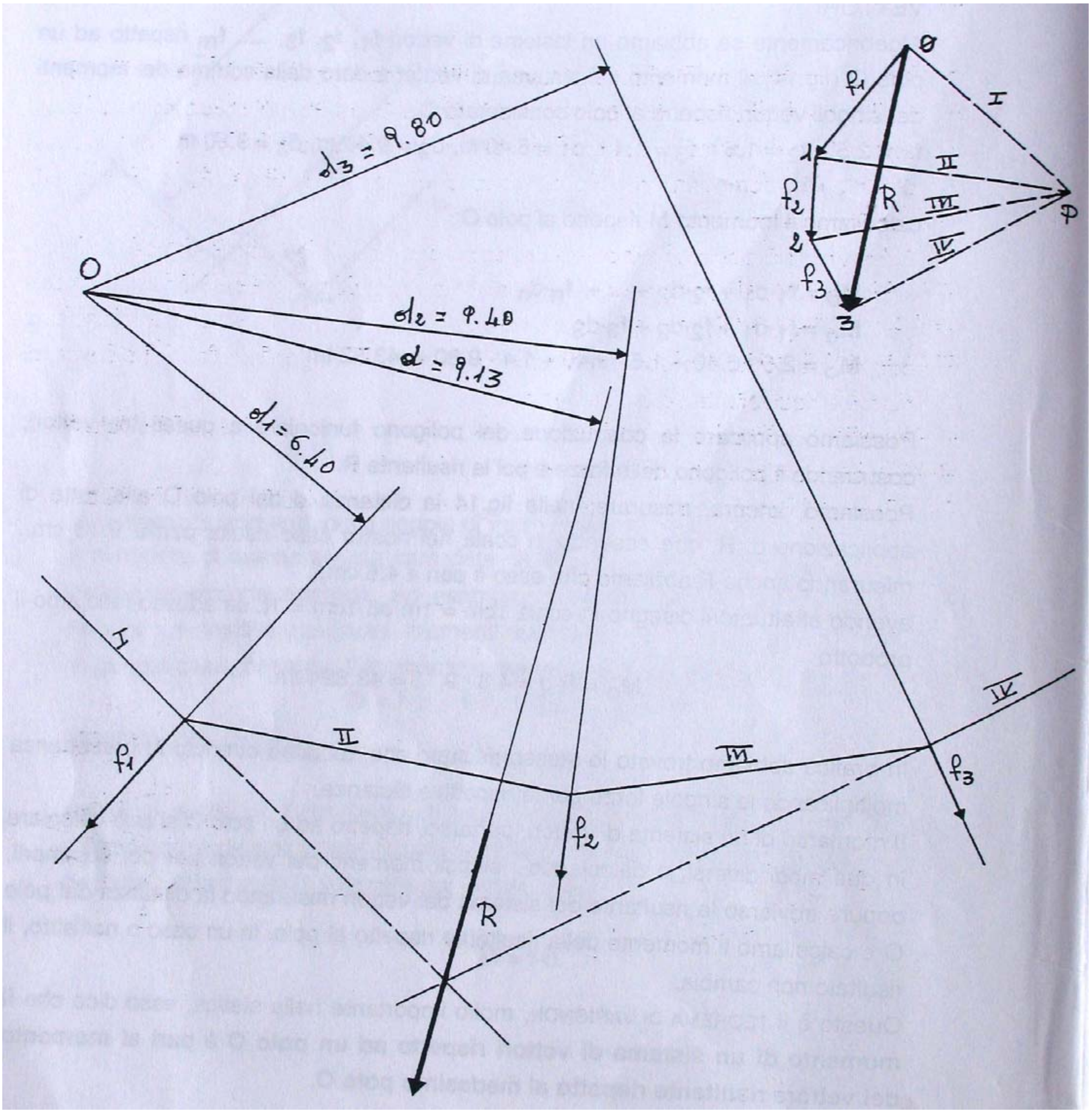
$$\mathbf{M_O} = \mathbf{f_1}\cdot d_1 + \mathbf{f_2}\cdot d_2 + ... + \mathbf{f_n}\cdot d_n$$
$$\mathbf{M_O} = \mathbf{f_1}\cdot d_1 + \mathbf{f_2}\cdot d_2 + \mathbf{f_3}\cdot d_3$$
$$\mathbf{M_O} = 2.5 \cdot 6.40 + 1.5 \cdot 9.40 + 1.4 \cdot 9.80 = 43.82 \text{ tm}$$

Possiamo applicare la costruzione del poligono funicolare a questi tre vettori, costruendo il poligono delle forze e poi la risultante **R**.
Possiamo, ancora, misurare, nella fig.14 la distanza d dal polo O alla retta di applicazione di **R**, che essendo in scala nel nostro caso risulta pari a 9.13 cm., misurando anche **R** abbiamo che esso è pari a 4.8 cm.
avendo effettuato il disegno in scala 1cm = 1m ed 1cm = 1t, se adesso facciamo il prodotto

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{R}\cdot d = 4.8 \cdot 9.13 = 43.824 \text{ tm}$$

In pratica abbiamo trovato lo stesso risultato che abbiamo ottenuto in precedenza moltiplicando le singole forze per le rispettive distanze.
Il momento di un sistema di vettori, pertanto, rispetto ad un polo O si può calcolare in due modi diversi, o calcolando i singoli momenti dei vettori per poi sommarli, oppure troviamo la risultante del sistema dei vettori misurando la distanza dal polo O e calcoliamo il momento della risultante rispetto al polo. In un caso o nell'altro, il risultato non cambia.
Questo è il TEOREMA DI VARIGNON, molto importante nella statica, esso dice che **il momento di un sistema di vettori rispetto ad un polo O è pari al momento del vettore risultante rispetto al medesimo polo O**.

fig.14



CASI PARTICOLARI

I caso: sistema di vettori con risultante pari a zero e momento risultante diverso da zero.

Avendo un sistema di vettori, ed avendo costruito il poligono delle forze e quello funicolare, si potrebbe verificare, come in fig.15, che il verso dell'ultimo vettore $\mathbf{f_4}$, coincide con il punto di applicazione del vettore $\mathbf{f_1}$, cioè il poligono delle forze è chiuso. Ciò comporta che nel poligono delle forze, la prima (I) e l'ultima (V) componente coincidono.
Osservando il poligono funicolare, notiamo che il primo e l'ultimo lato del poligono sono paralleli, ed essendo le componenti I e V uguali ma di verso opposto, anche se li prolunghiamo, non è possibile trovare il risultante in quanto essi formano una coppia, quindi esiste solo un momento, ovvero possiamo dire che il sistema di vettori è equivalente ad un momento.
In definitiva, in questo caso, la risultante sarà uguale a zero poichè la risultante di una coppia è nulla, ovvero ci troviamo in presenza di:
sistema di vettori con risultante pari a zero e momento risultante diverso da zero.

ovvero

R = 0

M ≠ O

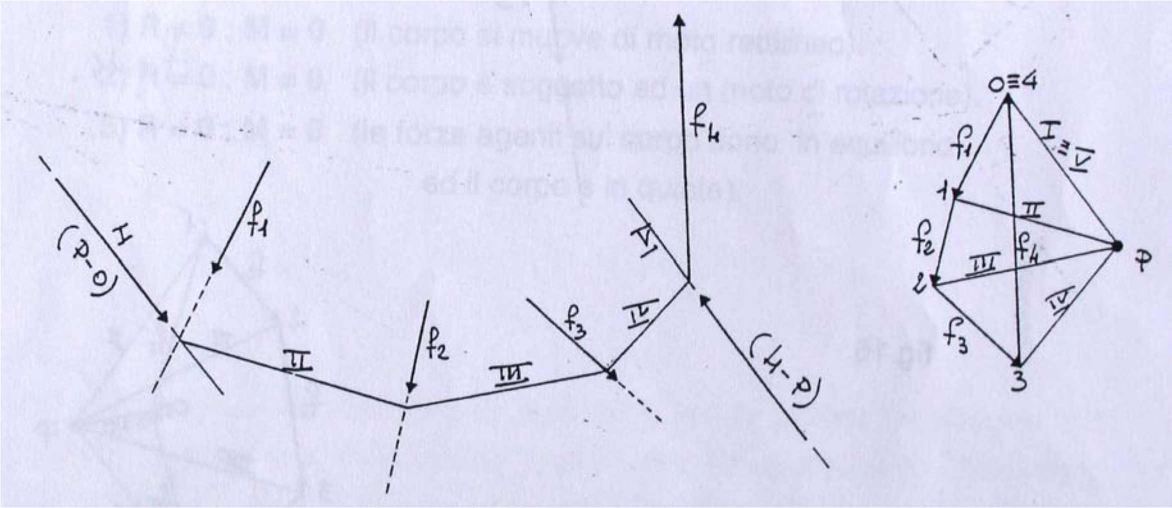


fig.15

II caso: sistema di vettori con risultante e momento risultante pari a zero.

In questo II caso, (vedi fig.16) notiamo che la prima e l'ultima componente giacciono sulla stessa retta d'azione, questo significa che anche il momento risultante è uguale a zero perchè tra prima ed ultima componente non c'è braccio, ovvero che non formano una coppia ma sono due vettori uguali e contrari che giacciono sulla stessa retta.

R=0

M=0

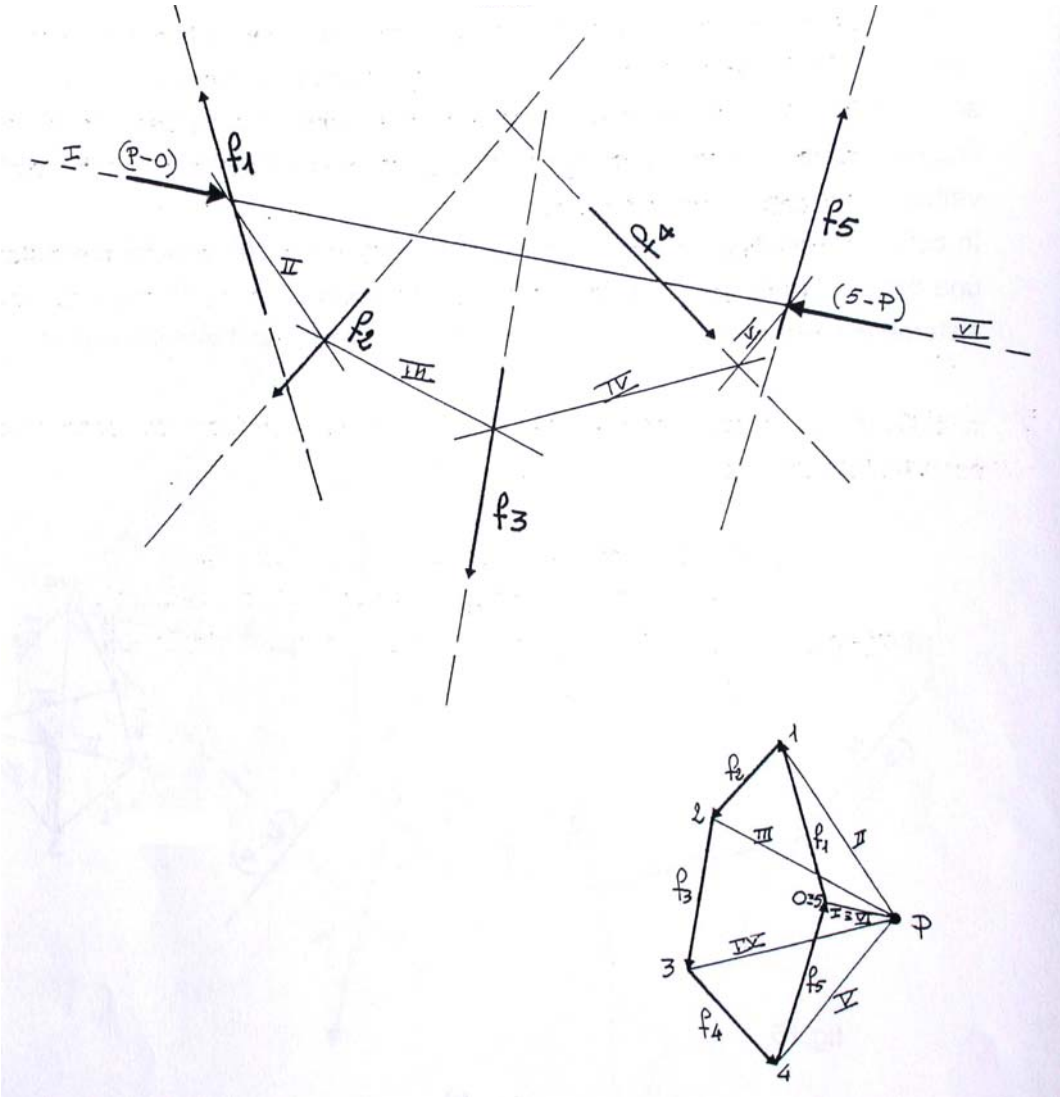


fig.16

CONDIZIONI DI MOTO E DI EQUILIBRIO DI UN CORPO SOGGETTO AD UN SISTEMA DI FORZE

Con quanto detto finora, abbiamo stabilito le condizioni di moto e di equilibrio di un sistema di forze. Questo vuol dire che se abbiamo un corpo, una struttura, una fondazione, soggetto a delle forze esterne e a dei vincoli, ovvero soggetto ad un sistema di vettori, applicando la costruzione del poligono delle forze e del poligono funicolare, possiamo avere, così come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, tre casi:

a) Risultante diverso da zero e Momento uguale a zero. In questo caso il corpo si muove di moto rettilineo poiché il corpo è soggetto all'azione del risultante che lo spinge in una direzione.

b) Risultante uguale a zero e Momento diverso da zero. In questo caso il corpo è soggetto ad una rotazione in quanto ci ritroviamo nel caso di un corpo a cui è applicata una coppia di forze.

c) Risultante uguale a zero e Momento uguale a zero. In questo caso le forze agenti sul corpo sono in equilibrio ed il corpo quindi è in quiete.

in definitiva le condizioni grafiche sul moto e sull'equilibrio dei corpi possono essere sintetizzate analiticamente in:

1) $\mathbf{R \neq 0}$; $\mathbf{M = 0}$ (il corpo si muove di moto rettilineo).
2) $\mathbf{R = 0}$; $\mathbf{M \neq 0}$ (il corpo è soggetto ad un moto di rotazione).
3) $\mathbf{R = 0}$; $\mathbf{M = 0}$ (le forze agenti sul corpo sono in equilibrio ed il corpo è in quiete).